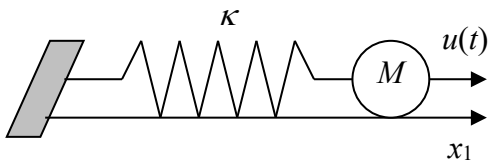
Simulazione
Il sistema massa-molla

Data .....
Cognome..... **Nome** .....

1. Formulazione del modello

Si vuole simulare la dinamica di un sistema meccanico costituito da una massa collegata a una molla che si muove facendo attrito su un piano (v. figura).



Alla massa M è applicata una forza $u(t)$ (supposta per semplicità costante nel tempo: $u(t) = \bar{u}$ = costante). La reazione vincolare della molla è proporzionale, secondo un coefficiente κ, all'elongazione (Legge di Hook). L'attrito è proporzionale alla velocità della massa secondo una costante h. L'accelerazione è quindi ottenibile applicando il secondo principio della dinamica.

Il sistema meccanico può essere descritto mediante un sistema a tempo continuo costituito dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{M}\left(u(t) - \kappa x_1 - h x_2\right) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{1}$$

dove le variabili di stato x_1 e x_2 rappresentano rispettivamente la posizione e la velocità della massa, e l'uscita y è la posizione della massa.

Trattandosi di un sistema a tempo continuo, per simularne la dinamica è necessario utilizzare un metodo di discretizzazione. In questo laboratorio confronteremo le prestazioni di due metodi espliciti: quello di Eulero e quello di Runge-Kutta.

Entrambi i metodi sostituiscono il generico sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

in cui $\mathbf{x}$ è il vettore di stato e $\mathbf{f}()$ la funzione generatrice del sistema, con un sistema a tempo discreto nel quale la derivata è sostituita dal rapporto incrementale:

$$\frac{\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1} - \widetilde{\mathbf{x}}_k}{\Delta t} = \mathbf{f}^*(\widetilde{\mathbf{x}}_k, \widetilde{\mathbf{x}}_{k+1}) \tag{3}$$

dove Δt è il passo di discretizzazione, k è l'indice del passo, $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ è il valore (approssimato) di $\mathbf{x}$ al passo k, cioè all'istante di tempo $t = k\Delta t$, e $\mathbf{f}^*$ è una somma pesata di valori di $\mathbf{f}()$ calcolati in istanti diversi.

L'equazione (3) può essere riscritta in forma ricorsiva come

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{x}}_k + \Delta t\, \mathbf{f}^*(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}) \tag{4}$$

Nel caso del metodo di Eulero, $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_k)$: in sostanza, il metodo consiste nel calcolare la derivata di $\mathbf{x}$ rispetto a t ed estrapolarla per tutto l'intervallo Δt. Il sistema (1) può dunque essere discretizzato come

$$\begin{cases} \tilde{x}_{1,k+1} = \tilde{x}_{1,k} + \Delta t\ f_{1,k} \\ f_{1,k} = \tilde{x}_{2,k} \\ \tilde{x}_{2,k+1} = \tilde{x}_{2,k} + \Delta t\ f_{2,k} \\ f_{2,k} = \left[\dfrac{1}{M}\left(\bar{u} - \kappa\tilde{x}_{1,k} - h\tilde{x}_{2,k}\right) \right] \\ \\ \tilde{y}_{k+1} = \tilde{x}_{1,k+1} \end{cases} \tag{5}$$

L'implementazione del metodo di Runge-Kutta è invece più complessa. $\mathbf{f}^*$ è infatti data da

$$\mathbf{f}^* = \tfrac{1}{6}\mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}_k) + \tfrac{2}{6}\mathbf{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}_k) + \tfrac{2}{6}\mathbf{f}_3(\tilde{\mathbf{x}}_k) + \tfrac{1}{6}\mathbf{f}_4(\tilde{\mathbf{x}}_k) \tag{6}$$

con

$$\mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_k)$$
$$\mathbf{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{f}\left(\tilde{\mathbf{x}}_k + \tfrac{1}{2}\Delta t\ \mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}_k)\right)$$
$$\mathbf{f}_3(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{f}\left(\tilde{\mathbf{x}}_k + \tfrac{1}{2}\Delta t\ \mathbf{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}_k)\right)$$
$$\mathbf{f}_4(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{f}\left(\tilde{\mathbf{x}}_k + \Delta t\ \mathbf{f}_3(\tilde{\mathbf{x}}_k)\right)$$

Il sistema (1) si trasforma quindi nel seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{1,k+1} = \tilde{x}_{1,k} + \Delta t\left(\tfrac{1}{6} f_{1\ 1,k} + \tfrac{2}{6} f_{2\ 1,k} + \tfrac{2}{6} f_{3\ 1,k} + \tfrac{1}{6} f_{4\ 1,k}\right) \\ f_{1\ 1,k} = \tilde{x}_{2,k} \\ f_{2\ 1,k} = \tilde{x}_{2,k} + \tfrac{1}{2}\Delta t\ f_{1\ 2,k} \\ f_{3\ 1,k} = \tilde{x}_{2,k} + \tfrac{1}{2}\Delta t\ f_{2\ 2,k} \\ f_{4\ 1,k} = \tilde{x}_{2,k} + \Delta t\ f_{3\ 2,k} \\ \\ \tilde{x}_{2,k+1} = \tilde{x}_{2,k} + \Delta t\left(\tfrac{1}{6} f_{1\ 2,k} + \tfrac{2}{6} f_{2\ 2,k} + \tfrac{2}{6} f_{3\ 2,k} + \tfrac{1}{6} f_{4\ 2,k}\right) \\ f_{1\ 2,k} = \dfrac{1}{M}\left(\bar{u} - \kappa\tilde{x}_{1,k} - h\tilde{x}_{2,k}\right) \\ f_{2\ 2,k} = \dfrac{1}{M}\left(\bar{u} - \kappa(\tilde{x}_{1,k} + \tfrac{1}{2}\Delta t\ f_{1\ 1,k}) - h(\tilde{x}_{2,k} + \tfrac{1}{2}\Delta t\ f_{1\ 2,k})\right) \\ f_{3\ 2,k} = \dfrac{1}{M}\left(\bar{u} - \kappa(\tilde{x}_{1,k} + \tfrac{1}{2}\Delta t\ f_{2\ 1,k}) - h(\tilde{x}_{2,k} + \tfrac{1}{2}\Delta t\ f_{2\ 2,k})\right) \\ f_{4\ 2,k} = \dfrac{1}{M}\left(\bar{u} - \kappa(\tilde{x}_{1,k} + \Delta t\ f_{3\ 1,k}) - h(\tilde{x}_{2,k} + \Delta t\ f_{3\ 2,k})\right) \\ \\ \tilde{y}_{k+1} = \tilde{x}_{1,k+1} \\ \end{cases} \tag{7}$$

1.1 Impostazione del foglio di lavoro

Inserite nella parte superiore del foglio di lavoro i valori dei parametri M, κ, h e $\bar{u}$, il passo di discretizzazione Δt e i valori iniziali delle due variabili di stato $\tilde{x}_{1,0}$ e $\tilde{x}_{2,0}$, come indicato nella figura sottostante. (*due suggerimenti per la formattazione:* per inserire la lettera Δ (Delta), digitate «Dt» nella cella, evidenziate la lettera D, selezionate la voce Formato Celle... dal menu tasto destro del mouse e indicate Symbol come Tipo di Carattere; per inserire dei pedici evidenziate il testo da mettere a pedice, selezionate la voce Formato Celle... dal menu tasto destro del mouse e spuntate la voce Pedice tra gli Effetti)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		**M**	**k**	**h**	**u**		**Δt**		**$x_{1,0}$**	**$x_{2,0}$**	
3		1	1	1	1		0,1		0	0	
4											

Definite i seguenti nomi per le celle che contengono i valori dei parametri appena inseriti (ricordatevi di assegnare pure il nome alle celle cosi da richiamare più facilmente i parametri nelle equazioni… casella in alto, a sinistra della barra di inserimento formule):

Cella	B3	C3	D3	E3	G3
Nome	M	k	h	u	Dt
Parametro	M	κ	h	$\bar{u}$	Δt

Intestate ora le colonne per il calcolo dell'indice del passo (indicato nel seguito con i anziché con k per evitare confusioni con il coefficiente κ), del corrispondente istante di tempo t e del movimento del sistema con il metodo di Eulero, come indicato nella figura sottostante. (suggerimento per la formattazione: per inserire un testo a cavallo di più celle, selezionate l'intervallo di celle e fate clic sul pulsante della barra degli strumenti; oppure selezionate le celle, selezionate la voce Formato Celle... dal menu tasto destro del mouse, spostatevi sulla linguetta Allineamento e spuntate la voce Unione Celle tra i comandi Controllo testo)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
4											
5					**Eulero**						
6		**i**	**t**		**$x_{1,i}$**	**$x_{2,i}$**	**$f_{1,i}$**	**$f_{2,i}$**			
7											

Intestate infine le colonne per la simulazione del movimento del sistema con il metodo di Runge-Kutta come indicato nella figura sottostante.

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
4											
5	**Runge-Kutta**										
6	**$x_{1,i}$**	**$x_{2,i}$**	**$f_{1\ 1,i}$**	**$f_{1\ 2,i}$**	**$f_{2\ 1,i}$**	**$f_{2\ 2,i}$**	**$f_{3\ 1,i}$**	**$f_{3\ 2,i}$**	**$f_{4\ 1,i}$**	**$f_{4\ 2,i}$**	
7											

1.2 Simulazione con il metodo di Eulero

Nella colonna B inserite (partendo dalla cella B7) i valori dell'indice del passo i: iniziate da 0 e arrivate fino a 200 con passo 1. Nella colonna adiacente calcolate il corrispondente valore del tempo t come prodotto $i\Delta t$ tra l'indice del passo i e il passo di discretizzazione Δt (ovvero, inserite la formula =B7*Dt nella cella C7 e copiatela nelle celle sottostanti).

Inizializzate lo stato del sistema al passo 0 nelle celle E7 e F7, facendo riferimento ai valori inseriti nelle celle I3 e J3. Le celle E7 e F7 conterranno quindi rispettivamente $\widetilde{x}_{1,0}$ e $\widetilde{x}_{2,0}$.

Nelle celle G7 e H7 valutate la funzione $\mathbf{f}^*$ sulla base dei valori correnti di $\widetilde{\mathbf{x}}$, scrivete cioè la formula =F7 nella cella G7 e la formula =1/M*(u-k*E7-h*F7) nella cella H7. Formattate inoltre tutte le colonne utilizzate per la simulazione come Numero con 3 posizioni decimali (dal menu Formato Celle o dai pulsanti di accesso rapido).

Nelle celle E8 e F8 calcolate ora il vettore di stato al passo 1 (utilizzate l'equazione 5): quali formule dovete quindi inserire?

Cella	**Formula**
E8	.....
F8	.....

Quali sono i corrispondenti valori dello stato del sistema?

$\widetilde{x}_{1,1} =$ ..... $\widetilde{x}_{2,1} =$ .....

Ripetete ora il procedimento appena visto per valutare $\mathbf{f}^*$ e calcolare $\widetilde{\mathbf{x}}$ ai passi successivi. Quanto vale lo stato del sistema al tempo t = 10? A quale passo $\bar{i}$ corrisponde tale istante?

$\widetilde{x}_{1,\bar{i}} =$ ..... $\widetilde{x}_{2,\bar{i}} =$ ..... $\bar{i} =$ .....

1.3 Simulazione con il metodo di Runge-Kutta

Per quanto riguarda l'indice del passo i e il tempo t fate riferimento agli stessi valori utilizzati per la simulazione con il metodo di Eulero (colonne B e C). Nelle celle da J7 a S7 dovete calcolare le variabili di stato $\widetilde{x}_1$ e $\widetilde{x}_2$ e le funzioni $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ e $\mathbf{f}_4$, facendo riferimento alle funzioni del sistema (7). Formattate anche queste colonne come Numero con 3 posizioni decimali.

Quanto vale lo stato del sistema al passo i = 1?

$\widetilde{x}_{1,1} =$ ..... $\widetilde{x}_{2,1} =$ .....

Quanto vale lo stato del sistema al tempo t = 10? A quale passo $\bar{i}$ corrisponde tale istante?

$\widetilde{x}_{1,\bar{i}} =$ ..... $\widetilde{x}_{2,\bar{i}} =$ ..... $\bar{i} =$ .....

1.4 Rappresentazione grafica del movimento del sistema

Rappresentate graficamente il movimento dell'uscita y ($= x_1$) in funzione di t, simulato tramite i due metodi, per mezzo di un diagramma a dispersione con le seguenti caratteristiche:

- Tipo di grafico: dispersione (XY) con dati uniti fra loro da una linea **NON smussata**, senza indicatori
- Titolo del grafico: Movimento del sistema
- Nome della serie 1: Eulero
- Colore della serie 1: rosso (fate doppio clic sulla linea e selezionate il colore desiderato)
- Nome della serie 2: Runge-Kutta
- Colore della serie 2: verde
- Asse dei valori (X): t (s)
- Scala asse dei valori (X): Valore minimo 0, Valore massimo 10, Unità principale 2
- Asse dei valori (Y): y (m)
- Scala asse dei valori (Y): Valore minimo 0, Valore massimo 2, Unità principale 0,5

Osservate il grafico. Come varia la posizione della massa nel tempo? Il sistema tende a un equilibrio? Ci sono differenze tra i risultati forniti dai due metodi? .....
.....
.....
.....
.....

1.5 Rappresentazione grafica di una traiettoria

Rappresentate graficamente una traiettoria nello spazio di stato (cioè x_2 in funzione di x_1) tramite i due metodi, per mezzo di un diagramma a dispersione con le seguenti caratteristiche:

- Tipo di grafico: dispersione (XY) con dati uniti fra loro da una linea **NON smussata**, senza indicatori
- Titolo del grafico: Traiettoria
- Nome della serie 1: Eulero
- Colore della serie 1: rosso
- Nome della serie 2: Runge-Kutta
- Colore della serie 2: verde
- Asse dei valori (X): x1 (m)
- Scala asse dei valori (X): Valore minimo 0, Valore massimo 2, Unità principale 0,5
- Asse dei valori (Y): x2 (m/s)
- Scala asse dei valori (Y): Valore minimo -1, Valore massimo 1, Unità principale 0,5

Osservate il grafico. Che forma ha la traiettoria? Il sistema tende a un equilibrio? Ci sono differenze tra i risultati forniti dai due metodi? .....
.....
.....
.....
.....
.....

1.6 L'effetto del passo di discretizzazione

Confrontate adesso la robustezza dei due metodi rispetto all'ampiezza del passo di discretizzazione Δt: modificate il valore della cella G3, aumentandolo progressivamente da 0,1 a 0,2, 0,3, ecc.

Osservate come cambia il grafico. La variazione del passo di discretizzazione ha lo stesso effetto sulla traiettoria simulata con il metodo di Eulero e su quella simulata con il metodo di Runge-Kutta? .....
.....
.....
.....
.....

.....
.....

Quale metodo vi sembra maggiormente influenzato dalle variazioni del passo di discretizzazione?

☐ Eulero
☐ Runge-Kutta

Come diventa la traiettoria simulata con il metodo di Eulero impostando Δt = 1? (ampliate la scala delle ascisse all'intervallo da –1 a 3 e quella delle ordinate da –2 a 2) Il sistema converge ancora verso un punto di equilibrio? .....
.....
.....
.....

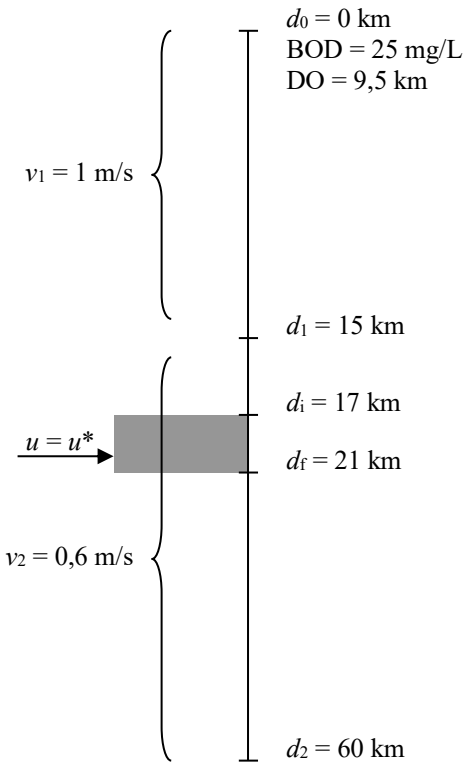
E impostando Δt = 1.1? Il sistema converge ancora verso un punto di equilibrio? .....
.....
.....
.....
.....

1.7 L'effetto delle condizioni iniziali e dei parametri

Modificando il passo di discretizzazione il sistema originale non cambia. Tuttavia i risultati delle simulazioni variano a causa delle approssimazioni introdotte dalla discretizzazione. Provate ora a modificare il sistema originale intervenendo sulle condizioni iniziali (modificando le celle I3 e J3) e sui valori dei parametri (modificando le celle da B3 a E3), avendo cura di scegliere un passo di discretizzazione adeguato, e osservate come cambiano il movimento e le traiettorie del sistema modificato.

Taratura
Modello di Streeter-Phelps

1. Formulazione del modello



Si vuole stimare il carico di BOD immesso in un fiume sulla base di misure della concentrazione di ossigeno rilevate lungo il corso del fiume stesso. Il fiume (v. figura a lato) è lungo 60 km dalla sorgente alla foce. La concentrazione di BOD alla sorgente è pari a 25 mg/L, mentre la concentrazione di ossigeno disciolto (DO) è pari a 9,5 mg/L.

Il primo tratto del fiume, di 15 km di lunghezza, è più ripido e ha una velocità di 1 m/s e una migliore riossigenazione, mentre il secondo tratto, in pianura, ha una velocità di 0,6 m/s. Nel tratto fra il 17-esimo e il 21-esimo chilometro il fiume riceve un ingresso di BOD di entità non nota u^*, mentre nel resto del corso fluviale non vi sono altri scarichi. Lungo il fiume, in condizioni idrauliche e di temperatura stazionarie, con una concentrazione di ossigeno a saturazione $\mathrm{DO_{sat}}$ = 10,5 mg/L, è stata svolta una campagna di rilevamento della concentrazione di ossigeno ottenendo le misure riportate nella tabella sottostante (in cui le distanze sono misurate in km e l'ossigeno disciolto in mg/L).

d	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
DO	9,5	8,5	8,9	9,0	8,9	8,4	8,4	8,9	8,2	7,0
d	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
DO	5,4	5,1	4,6	4,6	4,7	5,3	5,3	4,9	6,1	5,9
d	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
DO	5,8	6,7	6,3	7,1	6,7	6,7	7,6	7,9	7,4	7,4

La dinamica del BOD e del DO può essere descritta mediante il modello di Streeter-Phelps:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_1 + k_2 (\mathrm{DO_{sat}} - x_2) \end{cases} \tag{1}$$

dove le variabili di stato x_1 e x_2 rappresentano rispettivamente la concentrazione del BOD e del DO (in mg/L), u è l'ingresso del sistema (BOD in ingresso al fiume), k_1 rappresenta il tasso di consumo di ossigeno per ossidazione del BOD, k_2 è un coefficiente di riossigenazione fisica all'interfaccia aria-acqua e $\mathrm{DO_{sat}}$ è la concentrazione di ossigeno a saturazione (che è in generale una funzione della temperatura, ma in questo caso può essere considerata costante).

Poiché, come detto in precedenza, la riossigenazione nel primo tratto del fiume è migliore a causa della maggiore velocità della corrente, il parametro k_2 sarà diverso nei due tratti (indichiamo rispettivamente con k_2' e k_2'' i valori del parametro nel primo e nel secondo tratto) e si avrà $k_2' \geq k_2''$.

Inoltre l'ingresso dipende anch'esso dalla distanza d dalla sorgente e si avrà

$$u(d) = \begin{cases} u^* & \text{per } 17 \leq d \leq 21 \\ 0 & \text{per } d < 17,\ d > 21 \end{cases} \tag{2}$$

I parametri da stimare per tarare il modello sono pertanto 4: k_1, k_2', k_2'' e u^*.

1.1 Impostazione della simulazione

Essendo il sistema a tempo continuo, per simularne la dinamica è necessario utilizzare un metodo di discretizzazione. In questo laboratorio si utilizzerà il metodo di Eulero, avendo cura di scegliere un passo di discretizzazione Δt sufficientemente piccolo (in questo caso è sufficiente assumere Δt = 0,05).

Poiché la dinamica del sistema è espressa in funzione del tempo, mentre il coefficiente di riossigenazione e l'ingresso del sistema sono entrambi espressi in funzione della distanza dalla sorgente, è opportuno ricavare delle relazioni che consentano di trasformare i tempi di flusso in distanze e viceversa. Nel primo tratto di fiume di lunghezza d_1 = 15 km (v. figura nella pagina precedente), la velocità della corrente è pari a v_1 = 1 m/s. Il tempo necessario per percorrere il primo tratto sarà pertanto $t_1 = d_1 / v_1$ = 15 km / 1 m/s = 15 km / 3,6 km/h = 4,167 h. Nel secondo tratto, di lunghezza pari a $d_2 - d_1$ = 60 – 15 km = 45 km, la velocità della corrente è pari a v_2 = 0,6 m/s. Il tempo necessario per percorrere il secondo tratto sarà quindi $t_2 - t_1 = (d_2 - d_1) / v_2$ = 45 km / 0,6 m/s = 45 km / 2,16 km/h = 20,833 h. Il tempo necessario a percorrere l'intero corso del fiume sarà infine t_2 = 4,167 h + 20,833 h = 25 h.

Dovendo calcolare la distanza percorsa in funzione del tempo, si può scrivere invece:

$$d = \begin{cases} v_1 t & \text{per } t < t_1 \quad (t_1 = d_1 / v_1) \\ d_1 + v_2 (t - t_1) & \text{per } t \geq t_1 \end{cases} \tag{3}$$

Inserite nella parte superiore del foglio di lavoro i valori dei dati e il passo di discretizzazione Δt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		**dati**				**cond. iniziali**		**passo**	
3		**v_1**	**v_2**	**d_1**	**DO_{sat}**	**$x_{1,0}$**	**$x_{2,0}$**	**Δt**	
4		3,6	2,16	15	10,5	25	9,5	0,05	
5									

Inserite inoltre, nelle celle sottostanti, dei valori iniziali (fittizi) per i parametri incogniti del modello.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
5									
6		**parametri incogniti**							
7		**k_1**	**k_2'**	**k_2''**	**u***				
8		0,01	0,7	0,4	10				
9									

Definite i seguenti nomi per le celle che contengono i valori dei dati e dei parametri appena inseriti:

Cella	B4	C4	D4	E4	F4	G4	H4	B8	C8	D8	E8

Nome	v_1	v_2	d_1	DO_sat	x_10	x_20	Dt	k_1	k_21	k_22	u_star
Parametro	v_1	v_2	d_1	$\mathrm{DO}_{\mathrm{sat}}$	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	Δt	k_1	k_2'	k_2''	u^*

Organizzate ora le celle per la simulazione del sistema. Intestate le colonne per il calcolo dell'indice del passo i, del corrispondente istante di tempo t, della corrispondente distanza d, dell'ingresso u e delle variabili di stato del sistema con il metodo di Eulero, come indicato nella figura sottostante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10		**simulazione**							
11		**i**	**t**	**d**	**u**	**x_1**	**x_2**		
12									

Nella colonna B inserite (partendo dalla cella B12) i valori dell'indice del passo i. Ricavate il numero di passi necessari per simulare l'intero corso del fiume ricordando che l'ampiezza del passo è Δt = 0,05 h e che il tempo totale di percorrenza è t_2 = 25 h. Nelle celle adiacenti della colonna C calcolate il corrispondente valore del tempo t come prodotto $i\Delta t$. Nelle corrispondenti celle della colonna D calcolate la distanza d dalla sorgente mediante la formula (3) (utilizzate la funzione SE(*test*; *se_vero*; *se_falso*) di Excel). Nella colonna E calcolate i corrispondenti valori dell'ingresso u mediante la formula (2) (utilizzate la funzione SE() e la funzione E(*valore_logico_1*; *valore_logico_2*) di Excel). Nelle colonne F e G simulate infine la dinamica dello stato. Inizializzate lo stato del sistema al passo 0 nelle celle F12 e G12, facendo riferimento ai valori inseriti nelle celle F4 e G4. Il sistema che si ottiene discretizzando il sistema (1) con il metodo di Eulero è il seguente:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{1,i+1} = \tilde{x}_{1,i} + \Delta t \left[-k_1 \tilde{x}_{1,i} + u(d_i) \right] \\ \tilde{x}_{2,i+1} = \tilde{x}_{2,i} + \Delta t \left[-k_1 \tilde{x}_{1,i} + k_2(d_i)(\mathrm{DO}_{\mathrm{sat}} - \tilde{x}_{2,i}) \right] \end{cases} \tag{4}$$

Dove $u(d_i)$ è data dai valori calcolati nella colonna E, mentre $k_2(d_i)$ è rispettivamente pari a k_2' per $d \leq 15$ e a k_2'' per $d > 15$ (usate ancora la funzione SE() di Excel).

Quali formule dovete inserire nelle celle F13 e G13 per calcolare il vettore di stato al passo 1?

Cella	**Formula**
F13	.....
G13	.....

Qual è, al passo 1, lo stato del sistema corrispondente ai valori attuali dei parametri?

$\tilde{x}_{1,1}$ = ... $\tilde{x}_{2,1}$ = ...

Quanto vale lo stato del sistema alla foce del fiume?

$\tilde{x}_1(d = 60)$ = ... $\tilde{x}_2(d = 60)$ = ...

1.2 Rappresentazione grafica del movimento del sistema

Rappresentate graficamente la dinamica del BOD lungo il corso del fiume (cioè x_1 in funzione di d) per mezzo di un diagramma a dispersione con dati uniti fra loro da una linea, senza indicatori. Impostate i titoli degli assi (X: distanza (km); Y: BOD (mg/L)) e le rispettive scale (X: da 0 a 60 con passo 10; Y: da 0 a 100 con passo 20).

Rappresentate, in un grafico separato, anche la dinamica dell'ossigeno disciolto (cioè x_2 in funzione di d) per mezzo di un diagramma a dispersione con dati uniti fra loro da una linea, senza indicatori. Impostate

i titoli degli assi (X: distanza (km); Y: DO (mg/L)) e le rispettive scale (X: da 0 a 60 con passo 10; Y: da 0 a 12 con passo 2).

1.3 Confronto fra dati osservati e previsti

Aggiungete ora le misure di DO rilevate sul campo nella colonna H (v. figura sottostante). Scaricate i dati in formato Excel. Poiché le misure sono state effettuate in un numero limitato di stazioni, la cui distanza dalla sorgente non corrisponde necessariamente a un punto della simulazione, inserite i dati riportati nel file appena scaricato in corrispondenza del punto di simulazione più vicino (in termini di distanza d dalla sorgente) a quello di rilevamento.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10		**simulazione**							
11		**i**	**t**	**d**	**u**	**x_1**	**x_2**	**DO_{oss}**	
12									

Aggiungete i dati sperimentali anche al grafico dell'ossigeno. Procedete come segue: fate clic con il tasto destro del mouse sull'area del grafico e selezionate la voce di menu *Seleziona dati...*; cliccate sul pulsante *Aggiungi*; inserite rispettivamente gli intervalli di celle contenenti i valori della distanza (colonna D) come *Valori X* e quelli del DO osservato (colonna H) come *Valori Y* [**Attenzione: selezionate solo i le celle di distanza e DO osservato solo dove quest'ultimo è presente tenendo premuto CTRL**]; fate ora doppio clic sulla linea corrispondente alla nuova serie di dati nel grafico, e impostate le opzioni di Riempimento dal menu LINEA-LINEA *Nessuna linea* e dal menu PENNARELLO-OPZIONI INDICATORE *Predefinito* (selezionando un colore e uno stile a scelta per l'indicatore). Dovreste ora vedere nel grafico una serie di punti dispersi (i dati sperimentali) e una linea (il risultato della simulazione).

Osservate il grafico. Vi sembra che il modello (linea continua) interpoli i dati in modo corretto? .....
.....
.....
.....

1.4 Taratura del modello

Passate ora alla fase di taratura. Un metodo universalmente utilizzato per stimare i parametri di un modello è quello dei minimi quadrati, che consiste nel trovare quei valori dei parametri che minimizzano la somma degli scarti quadratici tra i valori osservati e quelli previsti di un'opportuna uscita del sistema, in questo caso la concentrazione di ossigeno:

$$\min_{\theta} J(\theta) = \min_{\theta} \sum_j \left[\bar{x}_{2,j} - \hat{x}_{2,j}(\theta)\right]^2 \tag{5}$$

Dove θ è il set di parametri (k_1, k_2', k_2'' e u^*), $\bar{x}_{2,j}$ è il valore osservato del DO nel punto j-esimo e $\hat{x}_{2,j}(\theta)$ è il corrispondente valore stimato per simulazione mediante il set di parametri θ. Predisponete le celle G7 e G8 per il calcolo della somma degli scarti quadratici J:

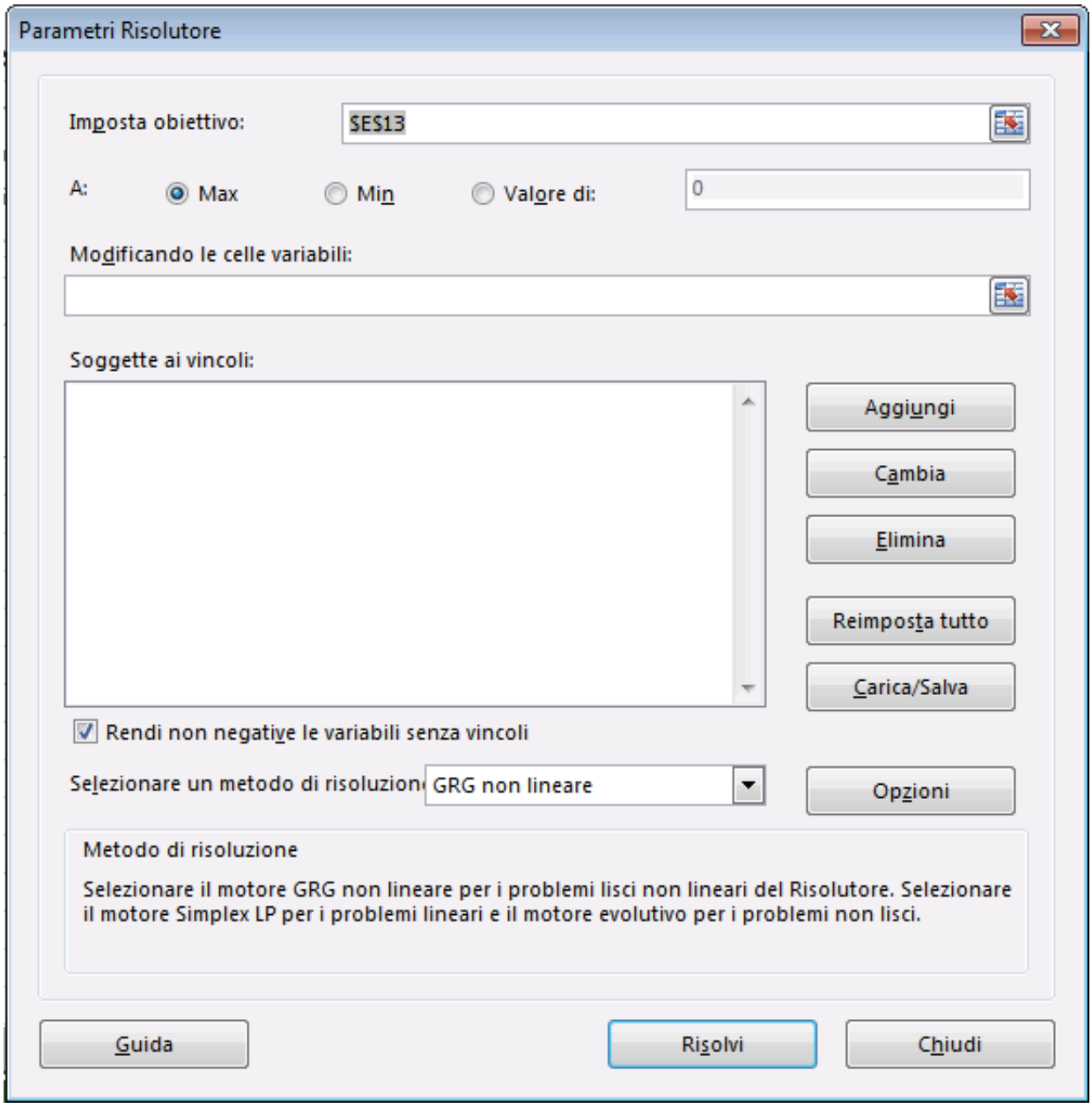
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
5									
6		**parametri incogniti**							
7		**k_1**	**k_2'**	**k_2''**	**u***		**J**		
8		0,0100	0,7	0,4	0,0000				
9									

Nella cella G8 calcolate la somma degli scarti al quadrato utilizzando la funzione SOMMA.Q.DIFF(*vettore_1*;*vettore_2*) e inserendo i riferimenti agli intervalli di celle delle colonne G e H che contengono rispettivamente le concentrazioni simulate e quelle rilevate.

Quanto vale J per il set di parametri corrente?

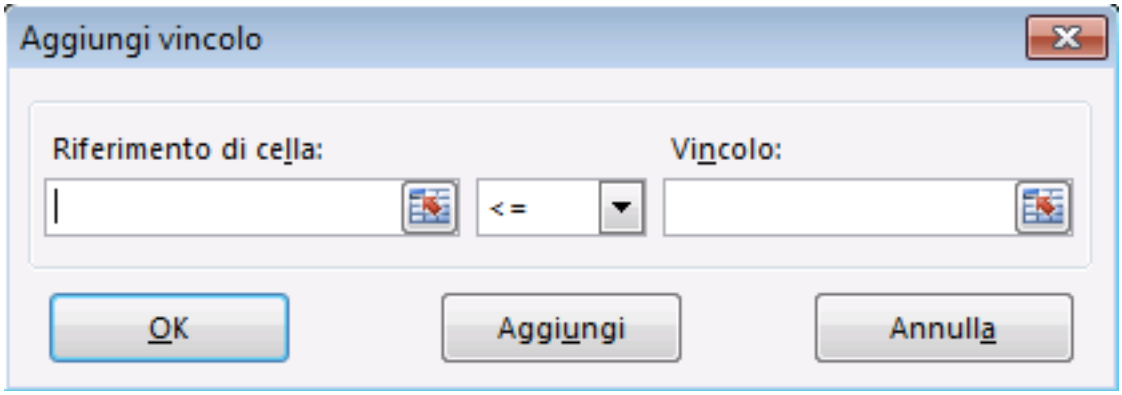
$J =$ .....

Lanciate ora il risolutore di Excel, dalla sezione *Analisi*, della scheda Dati.
Se non fosse presente: Fare clic sulla scheda File, quindi su Opzioni. Fare clic su Componenti aggiuntivi e quindi, in basso, sul pulsante Vai dopo aver selezionato Componenti aggiuntivi di Excel nella casella Gestisci. Nella casella Componenti aggiuntivi disponibili selezionare la casella di controllo Componente aggiuntivo Risolutore e quindi fare clic su OK. Oppure, su Mac con ultimo Office, dal menu Strumenti selezionate Componente aggiuntivo di Excel quindi Solver Add-in.
La finestra che si apre (*Parametri risolutore*) è visualizzata nella figura sottostante. Impostate i parametri del risolutore: inserite G8 come cella obiettivo (ovvero che contiene la funzione da ottimizzare, in questo caso la somma degli scarti quadratici); selezionate *Min* tra le opzioni di ottimizzazione (minimizzazione); inserite l'intervallo di celle B8:E8 (che contiene i parametri da stimare) nel campo *Modificando le celle variabili:*.



Inserite ora il vincolo $k_2' \geq k_2''$. Per fare questo, fate clic sul pulsante *Aggiungi* del riquadro *Soggette ai vincoli*. Si apre la finestra *Aggiungi vincolo* (v. figura sottostante): inserite i riferimenti alle celle che

contengono i due parametri (C8 e D8) e fate clic su OK. Fate quindi clic sul pulsante *Risolvi* della finestra *Parametri risolutore*.



Quali sono i valori dei parametri stimati dal risolutore?

$k_1 =$ ..... $k_2' =$ ..... $k_2'' =$ ..... $u^* =$ .....

Qual è il corrispondente valore di J?

$J =$ .....

Osservate i valori dei parametri. La condizione $k_2' \geq k_2''$ è soddisfatta?

☐ sì, $k_2' > k_2''$
☐ sì, $k_2' = k_2''$
☐ no, $k_2' < k_2''$

Il valore attuale di J è maggiore o minore di quello precedente? Perché? .....
.....
.....
.....
.....

Osservate il grafico che rappresenta la dinamica del DO. Vi sembra che ora il modello (linea continua) interpoli i dati in modo corretto? .....
.....
.....
.....
.....

Osservate ora la curva del BOD. A che cosa è dovuto il tratto ascendente? .....
.....
.....
.....
.....

Verso quali valori tenderebbe lo stato del sistema se il fiume fosse infinitamente lungo e non vi fossero ulteriori immissioni di BOD?

$\bar{x}_1 =$ ..... $\bar{x}_2 =$ .....

Simulazione e caos

Modello di esondazione del Lago di Como

1. Formulazione del modello

Si vuole simulare l'evoluzione dei livelli del lago di Como con particolare riguardo agli episodi di piena, senza l'effetto della regolazione dovuta alla diga di Olginate, a sud di Lecco, ovvero immaginando la diga completamente aperta.

1.1 La scala delle portate

Una serie di misure (vedi tabella a fondo pagina) è stata effettuata per determinare la "scala delle portate". La scala delle portate è la funzione che collega il livello del lago alla portata uscente dal lago.

Scegliete una classe di funzioni matematiche e identificate i suoi parametri in modo da rappresentare la "scala delle portate" meglio rappresentativa delle misure qui riportate. Costruite un grafico dei dati misurati e usatelo per ipotizzare una classe di funzione. Fate una prima ipotesi sui valori dei parametri della funzione e simulate le portate risultanti in funzione del livello. Utilizzate la funzione *SOMMA.Q.DIFF* per calcolare gli scarti rispetto alle misure reali, quindi minimizzate tale quantità con il Risolutore.

Che classe di funzione avete usato? .....

Livello (cm)	-50	-25	0	60	90	135	160	200	240
Portata uscente (m^3/s)	126	170	212	306	400	512	565	684	800

1.2 Validazione empirica: simulazione della traiettoria storica di invaso

Simulate ora la dinamica dei livelli del lago. La variabile di stato del sistema è ovviamente il volume d'acqua contenuto nel lago. Il modello più comune usato per la simulazione è il bilancio di massa, che in questo caso si può far corrispondere al bilancio dei volumi:

d (volume d'acqua nel lago) / dt = portata in ingresso – portata in uscita

Il bilancio totale dei flussi entranti per un dato giorno è registrato nel file "3.3 Esondazioni a Como dati.xls"[1], i cui dati tengono conto di ogni afflusso al lago e dell'effetto dell'evaporazione. Pertanto la quantità d'acqua che manca per "chiudere il bilancio" e soddisfare l'equazione, equivale alla portata in uscita dalla bocca del lago. Quest'ultima dipende dal livello del lago: a livelli maggiori corrisponde maggiore portata nell'effluente, seconda la scala delle portate sopra stimata.

Supponete che il lago abbia una superficie fissata pari a *S = 145,9 km²*: questo vi permette di trasformare i volumi in livelli del lago, con cui calcolare la portata in uscita secondo la scala delle portate che avete stimato nel passo precedente (dunque *y = qtà d'acqua / S*). Trasformate il bilancio di massa continuo in un modello discreto con passo temporale adeguato. Utilizzate il metodo di Eulero. Supponete inoltre che il lago sia a livello *-0.22* all'inizio della simulazione: questo livello è riferito al livello utilizzato nella scala di misura e non corrisponde ad un lago vuoto. Anche il volume d'acqua nel lago simulato dal modello non è un volume assoluto ma una variazione rispetto al volume di riferimento, e dunque durante la simulazione può diventare negativo.

1.3 Il passo di discretizzazione

Quali sono il massimo e minimo livello ottenuti nella simulazione? (usate la funzione *MIN()* e *MAX()* di Excel)

Massimo = ... Minimo = ...

A che giorno corrispondono? Per scoprirlo, Excel dispone della funzione *CONFRONTA* che restituisce il numero relativo della riga alla quale si trova un determinato valore, e della funziona INDICE che all'interno di una matrice restituisce il valore indicato dai riferimenti relativi di riga e colonna. Pertanto, la formula da inserire sarà del tipo *=INDICE("vettore delle date";CONFRONTA("cella che contiene il livello max/min";"vettore dei livelli simulati";0))*. Formattate il risultato come Data per ottenere il risultato desiderato.

Giorno di massimo = ... Giorno di minimo = ...

Come variano in funzione del passo di discretizzazione usato nella simulazione? E come varia invece il valore raggiunto dal massimo? Provate un passo pari a 6h, 12h, 36h e 48h.

Suggerimento: potete copiare i dati di afflusso in un'area separata del vostro foglio di calcolo, e affiancarvi a sinistra la data cui si riferiscono (anno = 1979). Nell'area del foglio di calcolo dove simulate il lago, calcolate l'istante temporale della simulazione come *t(i – 1) + Dt*, dove *Dt* è misurato in giorni. *t(0)* corrisponde a *01/01/1979 00.00*. Formattate la colonna con il formato *Data estesa*. Potete poi usare la funzione CERCA.VERT al posto della portata in ingresso, utilizzando l'istante di simulazione *t(i)* come *valore*, le celle contenenti i dati di afflusso e le date cui si riferiscono come *matrice.tabella* e 2 come *indice*. Ricordatevi di estendere la simulazione fino a coprire l'intero anno.

[1] Il file è scaricabile al seguente indirizzo: https://goo.gl/xGy3qa