

Equilibri e stabilità

Reazioni chimiche oscillanti

Data

Cognome..... Nome

1. Formulazione del modello

All'inizio degli anni '50, il biochimico russo Belousov scoprì una reazione chimica dal singolare comportamento oscillatorio. Mescolando acido citrico e ioni bromato in una soluzione di acido solforico in presenza di cerio, osservò infatti che la soluzione passava da incolore a gialla e viceversa, e ripeteva il passaggio da uno stato all'altro per numerose volte prima di raggiungere un equilibrio dopo circa un'ora.

In seguito, altre reazioni con comportamento oscillatorio sono state scoperte, tra cui la reazione tra biossido di cloro, iodio e acido malonico. La dinamica degli ioni I^- e ClO_2^- in tale reazione è stata descritta in forma semplificata mediante il seguente sistema non lineare del secondo ordine (Lengyel et al. 1990):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a - x_1 - \frac{4x_1x_2}{1+x_1^2} \\ \dot{x}_2 = bx_1 \left(1 - \frac{x_2}{1+x_1^2}\right) \end{cases} \quad (1)$$

dove le variabili di stato x_1 e x_2 rappresentano rispettivamente le concentrazioni dei due ioni e a e b sono parametri positivi che dipendono dalle concentrazioni (assunte costanti) degli altri reagenti e dalla cinetica della reazione.

Si voglia simulare il comportamento del sistema e studiarne la stabilità degli equilibri al variare dei parametri a e b .

1.1 Impostazione del foglio di lavoro

Poiché il sistema è a tempo continuo, per simularne la dinamica è necessario utilizzare un metodo di discretizzazione. Per semplicità, in questo laboratorio si utilizzerà esclusivamente il metodo di Eulero, avendo cura di scegliere un passo di discretizzazione sufficientemente piccolo.

Inserite nella parte superiore del foglio di lavoro i valori dei parametri a e b e il passo di discretizzazione Δt .

	A	B	C	D	E
1					
2		parametri			
3		a	b	Δt	
4		8	4	0,01	
5					

Definite i seguenti nomi per le celle che contengono i valori dei parametri appena inseriti:

Parametro	<i>a</i>	<i>b</i>	Δt
Cella	B4	C4	D4
Nome	a	b	D_t

1.2 Calcolo delle traiettorie

Organizzate ora le celle per il calcolo di due traiettorie. Intestate le colonne per il calcolo dell'indice del passo k , del corrispondente istante di tempo t e dello stato \mathbf{x} del sistema con il metodo di Eulero, come indicato nella figura sottostante.

	A	B	C	D	E	F	G	H
5								
6				traiettoria 1		traiettoria 2		
7		k	t	x₁	x₂	x₁	x₂	
8								

Nella colonna B inserite (partendo dalla cella B8) i valori dell'indice del passo k , iniziando da 0 e arrivando fino a 1000. Nella colonna adiacente calcolate il corrispondente valore del tempo t come prodotto $k\Delta t$. Per simulare la dinamica del sistema, dovete utilizzare un metodo di discretizzazione. Quali sono le equazioni che si ottengono discretizzando il sistema (1) con il metodo di Eulero?

$$\begin{cases} \tilde{x}_{1,k+1} = \dots \\ \tilde{x}_{2,k+1} = \dots \end{cases} \quad (2)$$

Inizializzate lo stato del sistema al passo 0 per la prima traiettoria nelle celle D8 e E8, impostando $\tilde{x}_{1,0} = 0$ e $\tilde{x}_{2,0} = 0$. Analogamente, inizializzate il sistema per la seconda traiettoria nelle celle F8 e G8, impostando $\tilde{x}_{1,0} = 2,5$ e $\tilde{x}_{2,0} = 6$. Sulla base di tali valori, ricavate i valori ai passi successivi utilizzando le equazioni del sistema (2).

Quali formule dovete inserire nelle celle D9 e E9 per calcolare il vettore di stato al passo 1?

Cella	Formula
D9
E9

Quali sono i corrispondenti valori dello stato del sistema?

$$\tilde{x}_{1,1} = \dots \quad \tilde{x}_{2,1} = \dots$$

Calcolate il vettore di stato al passo 1 anche per la seconda traiettoria. Quali sono i corrispondenti valori dello stato del sistema?

$$\tilde{x}_{1,1} = \dots \quad \tilde{x}_{2,1} = \dots$$

Ripetete ora il procedimento appena visto per calcolare il vettore di stato ai passi successivi. Quanto vale lo stato del sistema al passo $k=1000$?

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1,1000} &= \dots & \tilde{x}_{2,1000} &= \dots \quad (\text{prima traiettoria}) \\ \tilde{x}_{1,1000} &= \dots & \tilde{x}_{2,1000} &= \dots \quad (\text{seconda traiettoria}) \end{aligned}$$

1.3 Rappresentazione grafica del movimento

Rappresentate graficamente il movimento del sistema (cioè x_1 e x_2 in funzione di t) per mezzo di un diagramma a dispersione con dati uniti fra loro da linee (non smussate), senza indicatori.

Osservate il grafico. Come variano le concentrazioni dei due ioni nel tempo?

.....

.....

.....

.....

1.4 Rappresentazione grafica delle traiettorie

Rappresentate graficamente le traiettorie nello spazio di stato (cioè x_2 in funzione di x_1) per mezzo di un diagramma a dispersione con dati uniti fra loro da linee (non smussate), senza indicatori.

Osservate il grafico. Che forma hanno le traiettorie? Convergono entrambe verso uno stesso punto oppure divergono?

.....

.....

.....

.....

1.5 Calcolo degli equilibri

Per determinare i punti di equilibrio del sistema, si determinano dapprima le isocline, ovvero i luoghi dei punti in cui si annullano, separatamente, le derivate nel tempo di x_1 e x_2 :

$$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{(a - x_1)(1 + x_1^2)}{4x_1} \tag{3a}$$

$$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 + x_1^2 \end{cases} \tag{3b}$$

$$\tag{3c}$$

Si ricavano poi i punti di equilibrio imponendo che siano contemporaneamente soddisfatte le condizioni di stazionarietà per entrambe le variabili di stato, ovvero intersecando le curve dove $\dot{x}_1 = 0$ con quelle dove $\dot{x}_2 = 0$. In questo caso il sistema ammette un unico punto di equilibrio: quali sono le sue coordinate? (calcolatele per via analitica come intersezione delle isocline appena determinate)

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \dots \\ \bar{x}_2 = \dots \end{cases} \tag{4}$$

Inserite poi le formule (4) nelle celle F4 e G4 per calcolare le coordinate del punto di equilibrio, dopo avere impostato le celle adiacenti nel modo indicato nella figura sottostante.

	E	F	G	H
1				
2		equilibrio		
3		X1, eq	X2, eq	
4				

Quali sono le coordinate del punto di equilibrio?

$$\bar{x}_1 = \dots \quad \bar{x}_2 = \dots$$

Rappresentate ora graficamente il punto di equilibrio nel grafico delle traiettorie (punto 1.4). *Suggerimento:* se aggiungete una serie di dati costituita da un solo punto, probabilmente non riuscirete a visualizzarla correttamente sul grafico. Potete allora usare un piccolo trucco: (1) inserite altre due coordinate (ad esempio 10, 10) nelle celle F5 e G5; (2) selezionate l'intervallo F4:G5 e copiatelo e, dopo

aver selezionato il grafico, fate *incolla speciale* nel menu a tendina del pulsante *incolla* (specificando *Aggiungi celle come Nuova serie, Valori (Y) in colonne e Categorie (valori X) nella prima colonna* nella finestra di dialogo che si apre); (3) fate doppio clic sulla retta corrispondente ai dati aggiunti al grafico, selezionate la voce *Riempimento e linea* e impostate le opzioni *Nessuna linea* (nella sezione *linea*) e *Predefinito* (nella sezione *pennarello*); (4) modificate la serie di dati (tasto destro del mouse, *Seleziona dati..*) impostando solo le celle F4 e G4 come intervallo dati; (5) cancellate il contenuto delle celle F5 e G5.

Osservate il grafico. Le traiettorie convergono verso il punto di equilibrio trovato?

- si
- no

1.6 Analisi della stabilità dell'equilibrio

Per studiare la stabilità dell'equilibrio occorre linearizzare il sistema nel punto (\bar{x}_1, \bar{x}_2) :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}} \quad (5)$$

Con semplici passaggi matematici si ricava (purché abbiate calcolato correttamente le (4))

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{3\bar{x}_1^2 - 5}{\bar{x}_2} & -\frac{4\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \\ \frac{2b\bar{x}_1^2}{\bar{x}_2} & -\frac{b\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3a^2 - 125}{25 + a^2} & -\frac{20a}{25 + a^2} \\ \frac{2a^2b}{25 + a^2} & -\frac{5ab}{25 + a^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Suggerimento: per ricavare la matrice Jacobiana ricordate che la derivata del quoziente di due funzioni si ricava mediante la formula

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{df}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg}{dx}}{[g(x)]^2}$$

e ricordate che, per l'equazione (3c), $x_2 = 1 + x_1^2$.

Si calcolano poi gli autovalori del sistema linearizzato risolvendo l'equazione $\det(\lambda I - A) = 0$. Si ottiene la seguente equazione di secondo grado in λ :

$$\lambda^2 + \lambda \left(\frac{125 - 3a^2 + 5ab}{25 + a^2} \right) + \frac{625ab + 25a^3b}{(25 + a^2)^2} = 0 \quad (7)$$

Ponendo rispettivamente $\alpha = \frac{125 - 3a^2 + 5ab}{25 + a^2}$, $\beta = \frac{625ab + 25a^3b}{(25 + a^2)^2}$, la (7) può essere riscritta come

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0.$$

Gli autovalori risultano quindi

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \end{cases} \quad (8)$$

Impostate le celle per il calcolo degli autovalori del sistema linearizzato come mostrato nella figura successiva. Calcolate α e β nelle celle I4 e J4 con le formule fornite sopra, e associate i nomi «alfa» e «beta» rispettivamente alla cella I4 e alla cella J4.

	H	I	J	K	L	M	N
1							
2		calcolo degli autovalori					
3		α	β		λ_1	λ_2	
4				Re(λ)			
5				Im(λ)			
6							

Poiché i valori di λ_1 e λ_2 possono essere numeri reali o complessi a seconda che la quantità $\alpha^2 - 4\beta$ sia maggiore o minore di 0, calcolate la parte reale e quella immaginaria (eventualmente nulla) dei due autovalori inserendo nelle celle da L4 a M4 le seguenti formule:

Cella	Formula
L4	=SE(alfa^2-4*beta>0;(-alfa-RADQ(alfa^2-4*beta))/2;-alfa/2)
M4	=SE(alfa^2-4*beta>0;(-alfa+RADQ(alfa^2-4*beta))/2;-alfa/2)
L5	=SE(alfa^2-4*beta>0;0;-RADQ(4*beta-alfa^2)/2)
M5	=SE(alfa^2-4*beta>0;0;RADQ(4*beta-alfa^2)/2)

La funzione RADQ() calcola la radice quadrata dell'argomento. La funzione SE(*test*; *se_vero*; *se_falso*) restituisce il valore *se_vero* se l'espressione *test* è vera, altrimenti restituisce il valore *se_falso*.

Osservate i risultati. Gli autovalori risultano

- reali, entrambi negativi (nodo stabile)
- reali, entrambi positivi (nodo instabile)
- reali, di segno opposto (sella)
- complessi coniugati, con parte reale negativa (fuoco stabile)
- complessi coniugati, con parte reale positiva (fuoco instabile)

Il risultato è coerente con la forma delle traiettorie?

.....

.....

.....

1.7 Rappresentazione grafica degli autovalori

Rappresentate graficamente gli autovalori per mezzo di un diagramma a dispersione (con dati non uniti da linee e con indicatori), riportando in ascissa il valore della parte reale e in ordinata il valore della parte immaginaria di ognuno degli autovalori. Utilizzate il grafico per verificare graficamente la corrispondenza tra il cambiamento del comportamento del sistema al variare dei parametri e il cambiamento di valore degli autovalori (punto 1.7 successivo).

1.8 Modifica dei parametri del sistema

Modificate ora i parametri del sistema, imponendo $a = 10$ e $b = 2$. Quali sono le nuove coordinate del punto di equilibrio?

$$\bar{x}_1 = \dots\dots\dots \quad \bar{x}_2 = \dots\dots\dots$$

Gli autovalori risultano

- reali, entrambi negativi (nodo stabile)
- reali, entrambi positivi (nodo instabile)
- reali, di segno opposto (sella)
- complessi coniugati, con parte reale negativa (fuoco stabile)
- complessi coniugati, con parte reale positiva (fuoco instabile)

Osservate attentamente le traiettorie (modificate leggermente lo stato iniziale per la seconda traiettoria, ponendo $\tilde{x}_{1,0} = 2,1$ e $\tilde{x}_{2,0} = 5,1$) per determinarne il senso di rotazione.

Come variano ora nel tempo le concentrazioni dei due ioni?

.....

.....

.....

Qual è la forma delle traiettorie? Convergono ancora verso il punto di equilibrio?

.....

.....

.....

Verso che cosa convergono ora le traiettorie?

- un ciclo stabile
- un nuovo punto di equilibrio stabile

Modificate ora nuovamente i parametri del sistema, imponendo $a = 1$ e $b = 2$ (modificate nuovamente lo stato iniziale per la seconda traiettoria, ponendo $\tilde{x}_{1,0} = 2$ e $\tilde{x}_{2,0} = 1$). Quali sono le nuove coordinate del punto di equilibrio?

$$\bar{x}_1 = \dots\dots\dots \quad \bar{x}_2 = \dots\dots\dots$$

Gli autovalori risultano

- reali, entrambi negativi (nodo stabile)
- reali, entrambi positivi (nodo instabile)
- reali, di segno opposto (sella)
- complessi coniugati, con parte reale negativa (fuoco stabile)
- complessi coniugati, con parte reale positiva (fuoco instabile)

Osservate nuovamente le traiettorie (modificate lo stato iniziale per la seconda traiettoria, ponendo $\tilde{x}_{1,0} = 2$ e $\tilde{x}_{2,0} = 1$). Qual è la loro forma? Convergono ancora verso il punto di equilibrio?

.....

.....

.....

Come variano nel tempo le concentrazioni dei due ioni?

.....

.....

.....

.....

Linearizzazione e catastrofi

Biomassa in una foresta sfruttata

1. Crescita delle foreste

Si vuole studiare l'effetto dello sfruttamento sulla dinamica di una foresta, in particolare identificando delle regole che possano evitare al collasso della foresta stessa. Il primo passo consiste nella formulazione del modello dinamico della biomassa della foresta in assenza di sfruttamento. Indichiamo la biomassa con T (biomassa totale) per coerenza con il lavoro del prof. Gatto.¹ Utilizziamo la seguente formulazione:

$$\frac{dT}{dt} = G(T) = 0,4T^2 - 0,1T^3 \quad (1)$$

Si vuole studiare ora la dinamica di questo sistema, i suoi equilibri e la loro stabilità.

1.1 Foglio di lavoro

Impostate nella parte superiore del foglio di lavoro i valori dei coefficienti della dinamica della biomassa, il passo di discretizzazione Δt , lo stato iniziale del sistema $T(0)$. Definite inoltre i seguenti nomi per le celle che contengono i valori delle grandezze appena inserite:

Cella	B3	C3	D3	E3
Parametro	a	b	$T(0)$	Δt
Nome	a	b	T_0	D_t
Valore	0,4	0,1	2	0,5

1.2 Calcolo dell'equilibrio

Determinate per via algebrica gli stati \bar{T} del sistema, lasciando per ora indicati i valori dei parametri in forma simbolica:

$$\bar{T}_1 = \dots\dots\dots$$

$$\bar{T}_2 = \dots\dots\dots$$

Inserite queste formule nel foglio di lavoro nelle celle H3 e I3.

1.3 Simulazione del movimento del sistema

Intestate ora le colonne per il calcolo del passo k , del corrispondente istante di tempo t , del movimento dello stato T con il metodo di Eulero. Inserite in una colonna il passo k (cella B7), iniziando da 0 e finendo con 120. Nelle colonne adiacenti calcolate l'istante di tempo come $k\Delta t$ (colonna C) e il valore dello stato T (colonna E), tramite formula di Eulero $T(k+1) = T(k) + \Delta t \dot{T}$. In questa esercitazione, dovremo aggiungere dei componenti alla dinamica del sistema; per questo impostate un'ulteriore colonna (colonna D) dove calcolare il valore della funzione $G(T)$ e per ora ponete $T(k+1) = T(k) + \Delta t G(T)$.

Nella prima riga della simulazione (riga 8), lo stato T è uguale allo stato iniziale (usate un riferimento, non copiate il valore!) mentre non serve calcolare la funzione $G(T)$. Nella riga successiva, per $t > 0$, ponete $G(T)$ uguale alla formula (1) usando il valore di T della riga superiore. Calcolate $T(k+1)$ con il metodo di Eulero, facendo riferimento al valore di $G(T)$ della stessa riga e al valore di $T(k)$ della riga superiore.

¹ Gatto, M., & Rinaldi, S. (1987). Some models of catastrophic behavior in exploited forests. In Theory and models in vegetation science (pp. 213-222). Springer Netherlands. Il paper è scaricabile al seguente indirizzo: <https://bit.ly/2vPtneA>

Osservate ora i risultati. Quanto vale lo stato del sistema dopo 10 istanti temporali? Quale equilibrio viene raggiunto?

$$T(t = 10) = \dots\dots\dots$$

Rappresentate il movimento del sistema per via grafica, per mezzo di un grafico a dispersione (XY) con dati uniti fra loro da una linea (non smussata), senza indicatori. Aggiungete nome del grafico e degli assi, la legenda e aggiustate gli estremi del grafico, se non sono soddisfacenti.

1.4 Stabilità

Identificate il sistema linearizzato, $\frac{d}{dT} \left(\frac{dT}{dt} \right) = \frac{d}{dT} G(T)$ e analizzatelo attorno agli equilibri: determinate per via algebrica il valore assunto dal sistema linearizzato in corrispondenza degli equilibri.

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{dT}{dt} \right) \Big|_{T=\bar{T}_1} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{dT}{dt} \right) \Big|_{T=\bar{T}_2} = \dots\dots\dots$$

Inserite queste formule nel foglio di lavoro nelle celle J3 e K3, in funzione dei valori assunti dagli equilibri. Per ciascun equilibrio impostate la cella sottostante che determini la stabilità locale dell'equilibrio. Ricordando che autovalori con parte reale negativa determinano equilibri localmente stabili nei sistemi a tempo continuo, utilizzate la funzione $SE()$ per scrivere nella cella "*stabile*" o "*instabile*", a seconda dei casi. (Suggerimento: quali sono gli autovalori di un sistema del primo ordine?)

2. Sfruttamento

Si vuole ora studiare l'effetto dello sfruttamento. Utilizziamo il modello di sfruttamento dell'articolo già citato del prof. Gatto

$$\frac{dT}{dt} = G(T) - Eh(T)$$

dove $G(T)$ è la dinamica della foresta, E è un coefficiente chiamato *sfruttamento*, appunto, che misura l'aggressività degli sfruttatori, mentre $h(T)$ è una funzione che esprime la dipendenza del prelievo dalla biomassa. Si vuole ora analizzare l'effetto di E combinato ad alcune funzioni di prelievo.

2.1 Prelievo lineare

Inserite nella colonna F la funzione che rappresenti $h(T) = T$ (utilizzate la biomassa del passo precedente di simulazione, lo stesso valore che usate per calcolare $G(T)$). Aggiungete inoltre nella cella F3 il parametro E e definitene il nome:

Parametro	E
Nome	E
Valore	0,2

Nella colonna G, aggiornate ora il calcolo di $T(k + 1)$ tenendo dovutamente conto dello sfruttamento $Eh(T)$. Aggiungete al grafico creato al punto 1.3 la nuova traiettoria. Come cambia il movimento del sistema? E il valore dell'equilibrio?

.....

2.2 Visualizzare graficamente gli equilibri

Gli equilibri della foresta sfruttata sono i valori di T per cui $G(T) = Eh(T)$. Create un grafico che mostri le due funzioni al variare di T , così che le eventuali intersezioni mostrino gli equilibri del sistema. In un'area

a parte del foglio di lavoro (a partire dalla cella P30), impostate una colonna T con valori da 0 a 5 con passo 0,1 e due colonne $G(T)$ e $Eh(T)$ che contengano i corrispondenti valori. Create quindi un grafico a dispersione XY unito da linee non smussate senza indicatori utilizzando la colonna T e $G(T)$. Aggiungete quindi una serie di dati per $Eh(T)$. Visualizzate solo i valori positivi delle funzioni.

Quanti equilibri ci sono con $E = 0,2$?

Provate ora a incrementare il valore del coefficiente di sfruttamento, utilizzando i valori 0,3 0,39 0,41 e 0,5. Quanti equilibri ci sono con $E = 0,5$?

Cosa succede quindi alla biomassa della foresta? Quale limite sul coefficiente di sfruttamento della foresta consigliereste ad un gestore che ne voglia regolare lo sfruttamento?

.....

2.3 Gestione della foresta

Il sistema sottoposto a sfruttamento ha equilibri differenti da quanto calcolato al punto 1.2, come visto nel grafico del punto precedente (2.2). Per il caso di $h(T) = T$, si possono identificare analiticamente con le seguenti formule:

$$\bar{T}_1 = 0$$

$$\bar{T}_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bE}}{2b} \quad \text{se } E \leq \frac{a^2}{4b}$$

Inserite queste formule nel foglio di lavoro, prestando attenzione ad utilizzare la funzione $SE()$ per calcolare il secondo e il terzo equilibrio solo nel caso in cui essi esistano.

Supponiamo di aver consigliato $E = \frac{a^2}{4b}$ come valore limite per il coefficiente di sfruttamento. Cosa succede se, data la foresta all'equilibrio, tale valore di sfruttamento viene superato? Quanto tempo ha il gestore per riparare al danno?

.....

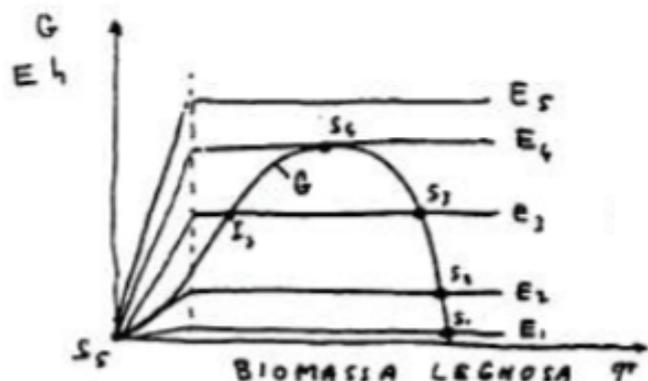
Cambiate ora la condizione iniziale: impostate E di nuovo a 0,2 e provate diversi valori di $T(0)$, per esempio 1, 0,6 e 0,5. Cosa succede alla foresta? Quando sopravvive?

.....

2.4 Prelievo lineare a tratti

Riponete $T(0) = 2$ ed $E = 0,2$. Nelle colonne I-J-K modificate il calcolo di $T(k+1)$ definendo lo sfruttamento $h(T)$ rappresentato a lato. Utilizzate la funzione $SE()$ per implementare in Excel:

$$h(T) = \begin{cases} T & \text{se } T < 1 \\ 1 & \text{se } T \geq 1 \end{cases}$$



(utilizzate la biomassa del passo precedente di simulazione, lo stesso valore che usate per calcolare $G(T)$). Ricordatevi di aggiornare sia la simulazione del sistema sia i calcoli per il grafico che mostra gli equilibri. Come cambia il valore dell'equilibrio?

.....

Provate a modificare il coefficiente di sfruttamento E e/o la condizione iniziale $T(0)$ e osservatene gli effetti, per esempio con $T(0) = 4$ ed $E = 0,6$. Commentate i risultati, ponendovi dal punto di vista del gestore della foresta e dei limiti che dovrebbe imporre sul coefficiente E . Provate anche a perturbare gli equilibri raggiunti durante la simulazione variando il valore di $T(40)$ di qualche decimale, per esempio aggiungendo 0,1. Ricordate di rimuovere la modifica.

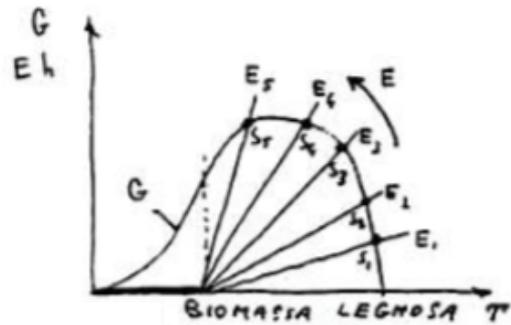
.....

2.5 Prelievo lineare a tratti alternativo

Riponete $T(0) = 2$ ed $E = 0,2$. Modificate il calcolo di $h(T)$ perché riproduca lo sfruttamento rappresentato a lato. Utilizzate la funzione $SE()$ per implementare in Excel:

$$h(T) = \begin{cases} 0 & \text{se } T < 1 \\ T-1 & \text{se } T \geq 1 \end{cases}$$

(utilizzate la biomassa del passo precedente di simulazione, lo stesso valore che usate per calcolare $G(T)$). Ricordatevi di aggiornare sia la simulazione del sistema sia i calcoli per il grafico che mostra gli equilibri. Come cambia il valore dell'equilibrio?



.....

Provate a modificare il coefficiente di sfruttamento E e/o la condizione iniziale $T(0)$ e osservatene gli effetti, per esempio con $T(0) = 0,1$ ed $E = 0,9$. Commentate i risultati.

.....

Ponetevi dal punto di vista del gestore della foresta che deve decidere quale tipo di funzione $h(T)$ sia più sicura per la foresta. Quale funzione consigliereste, tra le tre analizzate?

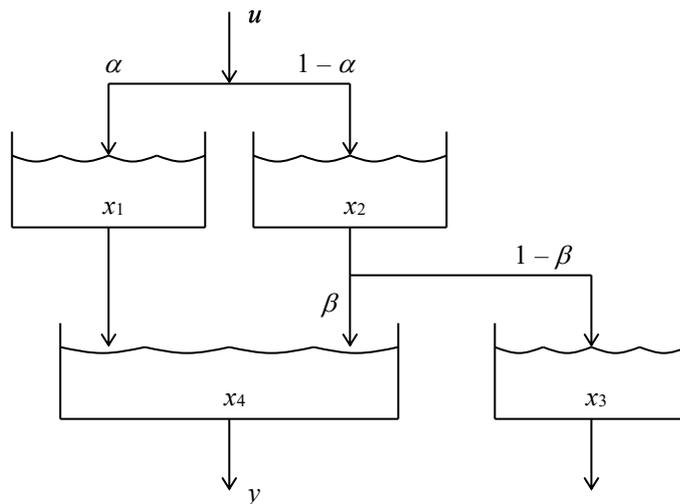
.....

Simulazione

Serbatoi lineari in rete

1. Formulazione del modello

Si vuole simulare la dinamica di una rete di serbatoi artificiali che intercettano un corso d'acqua. Lo schema della rete è schematizzato nella figura sottostante



in cui u è la portata in ingresso al sistema (m^3/giorno), α e β sono dei coefficienti di ripartizione delle portate verso i diversi serbatoi, x_i è il volume d'acqua contenuto nel serbatoio i -esimo (m^3), e y è la portata in uscita dal serbatoio 4 (m^3/giorno), che defluisce in un fiume a valle del sistema (la portata in uscita dal serbatoio 3 viene invece utilizzata per l'irrigazione di una zona agricola).

La dinamica temporale della rete può essere descritta mediante il seguente sistema dinamico a tempo continuo, in cui lo stato \mathbf{x} è rappresentato dai volumi di invaso dei 4 serbatoi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 + \alpha u \\ \dot{x}_2 = -k_2 x_2 + (1-\alpha)u \\ \dot{x}_3 = (1-\beta)k_2 x_2 - k_3 x_3 \\ \dot{x}_4 = k_1 x_1 + \beta k_2 x_2 - k_4 x_4 \\ y = k_4 x_4 \end{cases} \quad (1)$$

dove k_i è la costante di invaso del serbatoio i -esimo (giorni^{-1}).

1.1 Impostazione del foglio di lavoro

Inserite nella parte superiore del foglio di lavoro i valori dei parametri, il passo di discretizzazione Δt , l'ingresso u (supposto per ora costante e pari a \bar{u}) e lo stato iniziale del sistema $\mathbf{x}(0)$, come indicato nella figura sottostante. Notate che i 4 serbatoi sono vuoti al tempo 0 (i serbatoi non sono in servizio).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		k_1	k_2	k_3	k_4	α	β	Δt	u	$\mathbf{x}_1(0)$	$\mathbf{x}_2(0)$	$\mathbf{x}_3(0)$	$\mathbf{x}_4(0)$
3		0,0025	0,0025	0,001	0,002	0,8	0,9	30	1E+5	0	0	0	0

4												
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Definite inoltre i seguenti nomi per le celle che contengono i valori delle grandezze appena inserite:

Parametro	k_1	k_2	k_3	k_4	α	β	Δt	\bar{u}	$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$
Cella	B3	C3	D3	E3	F3	G3	H3	I3	J3	K3	L3	M3
Nome	k_1	k_2	k_3	k_4	alfa	beta	D_t	u	x_1_0	x_2_0	x_3_0	x_4_0

1.2 Calcolo dell'equilibrio

Determinate per via algebrica lo stato \bar{x} del sistema e l'uscita \bar{y} all'equilibrio in funzione della portata in ingresso $u (= \bar{u})$, lasciando per ora indicati i valori dei parametri in forma simbolica:

$\bar{x}_1 = \dots\dots\dots$
 $\bar{x}_2 = \dots\dots\dots$
 $\bar{x}_3 = \dots\dots\dots$
 $\bar{x}_4 = \dots\dots\dots$
 $\bar{y} = \dots\dots\dots$

Calcolate ora i valori dello stato e dell'uscita all'equilibrio nell'intervallo di celle E6:I6 usando le formule appena ricavate e sostituendo i valori dei parametri assegnati (v. figura sottostante). Scriveteli poi nelle celle predisposte in figura.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4									
5					X1,eq	X2,eq	X3,eq	X4,eq	Yeq
6				
7									

1.3 Simulazione del movimento del sistema

Intestate ora le colonne per il calcolo del passo k , del corrispondente istante di tempo t , del movimento dello stato x e dell'uscita y con il metodo di Eulero. Inserite anche una colonna per la visualizzazione dell'ingresso u (v. figura sottostante).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
6									
7		k	t	u	x1	x2	x3	x4	y
8	
9	

Nella colonna B inserite il passo k , iniziando da 0 nella cella B8 e finendo con 120 nella cella B128. Nella colonna C calcolate l'istante di tempo come $k\Delta t$. Nella colonna D inserite l'ingresso u , facendo riferimento alla cella I3 in cui ne avete impostato il valore (per ora u è costante, ma in seguito considereremo un ingresso variabile). Nelle colonne da E a H dovete calcolare il valore (approssimato mediante il metodo di Eulero) delle 4 variabili di stato. Nella riga 8 fate semplicemente riferimento ai valori iniziali inseriti nelle celle J3:M3; nelle righe da 9 a 128 inserite invece le formule necessarie per l'implementazione del metodo. Nella colonna I, infine, calcolate l'uscita del sistema come $y = k_4 x_4$.

Scrivete di seguito le formule necessarie a implementare il metodo di Eulero (in modo tale che possano essere copiate e incollate senza modifiche nelle celle sottostanti):

E9 =
F9 =
G9 =
H9 =

Osservate ora i risultati. Quanto vale lo stato del sistema dopo un anno dalla messa in servizio dei serbatoi? E dopo 10 anni? Confrontate i valori con quelli all'equilibrio.

$x_1(t = 1 \text{ anno}) = \dots\dots\dots x_1(t = 10 \text{ anni}) = \dots\dots\dots$
 $x_2(t = 1 \text{ anno}) = \dots\dots\dots x_2(t = 10 \text{ anni}) = \dots\dots\dots$
 $x_3(t = 1 \text{ anno}) = \dots\dots\dots x_3(t = 10 \text{ anni}) = \dots\dots\dots$
 $x_4(t = 1 \text{ anno}) = \dots\dots\dots x_4(t = 10 \text{ anni}) = \dots\dots\dots$

Rappresentate il movimento del sistema per via grafica, per mezzo di un diagramma con le seguenti caratteristiche:

- Tipo di grafico: dispersione (XY) con dati uniti fra loro da una linea (non smussata), senza indicatori
- Titolo del grafico: Movimento del sistema
- Serie di dati: selezionate l'intervallo C8:C128 come Valori X e l'intervallo E8:H128 come Valori Y
- Asse dei valori (X): tempo (giorni)
- Scala asse dei valori (X): Valore minimo 0, Valore massimo 3600, Unità principale 360
- Asse dei valori (Y): invaso (m^3)
- Scala asse dei valori (Y): Valore minimo 0, Valore massimo 50 000 000, Unità principale 10 000 000

Osservate il grafico. Come variano nel tempo i volumi contenuti nei 4 serbatoi?

.....

.....

.....

.....

Confrontate ora ingresso e uscita del sistema per mezzo di un diagramma con le seguenti caratteristiche:

- Tipo di grafico: dispersione (XY) con dati uniti fra loro da una linea, senza indicatori
- Serie di dati: selezionate l'intervallo C8:C128 come Valori X e le serie D8:D128 e I8:I128 come Valori Y
- Asse dei valori (X): tempo (giorni)
- Scala asse dei valori (X): Valore minimo 0, Valore massimo 3 600, Unità principale 360
- Asse dei valori (Y): invaso (m^3)
- Scala asse dei valori (Y): Valore minimo 0, Valore massimo 125 000, Unità principale 25 000

Osservate il grafico. Come varia nel tempo l'uscita del sistema? Come si giustifica, sul lungo periodo, la differenza tra ingresso e uscita?

.....

.....

.....

Osservate ora cosa succederebbe se decideste di mettere fuori servizio i serbatoi: copiate i valori dello stato all'equilibrio e incollateli (solo i valori e non le formule) nelle celle J3:M3 (ipotizzate quindi che il sistema sia a regime). Modificate l'ingresso del sistema ponendo $\bar{u} = 0$ nella cella I3. Come variano nel tempo lo stato e l'uscita del sistema?

.....

.....

.....

.....

.....

1.4 Risposta del sistema all'impulso

Le dinamiche osservate finora non erano altro che risposte canoniche del sistema. A quale tipo di ingresso canonico?

Simulate ora la risposta della rete di serbatoi a un impulso, ad esempio un'onda di piena. Immaginate che i serbatoi siano vuoti (ponete a zero le celle da J3 a M3) e che l'ingresso sia nullo (ponete a zero

anche la cella I3). Generate ora un impulso inserendo il valore 2000000 nella cella D20. Osservate i grafici e descrivete la risposta all'impulso del sistema.

.....

Provate a modificare l'ampiezza dell'impulso e osservatene gli effetti. Commentate i risultati.

.....

1.5 Risposta del sistema all'ingresso sinusoidale

Simulate adesso l'effetto di variazioni stagionali della portata del corso d'acqua che alimenta la rete. Immaginate che i serbatoi siano vuoti (ponete a zero le celle da J3 a M3). Ipotizzate che l'ingresso vari secondo la seguente legge sinusoidale:

$$u(t) = a + b \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t + \tau)\right) \tag{2}$$

Inserite i 3 parametri necessari per descrivere le fluttuazioni di *u* nelle celle O3:Q3 (v. figura sottostante).

	N	O	P	Q	R
1					
2		a	b	τ	
3		100000	20000	0	
4					

Definite inoltre i seguenti nomi per le celle che contengono i valori dei parametri:

Parametro	<i>a</i>	<i>b</i>	τ
Cella	O3	P3	Q3
Nome	a	b	tau

Inserite ora nella colonna D la formula data dall'equazione (2). Per inserire il valore di π usate la funzione PI.GRECO(). Osservate i grafici e descrivete la risposta del sistema all'ingresso sinusoidale.

.....

Provate a modificare i parametri dell'ingresso e osservatene gli effetti. Commentate i risultati.

.....

1.5 Modifica della rete

Provate ora a "tappare" il serbatoio numero 3 e a osservare le conseguenze sulla stabilità del sistema. Immaginate cioè di chiudere il serbatoio, in modo che l'acqua non possa defluire da esso (ad esempio, perché il sistema di irrigazione ad uso agricolo è temporaneamente rifornito da un altro corso d'acqua). Le equazioni del sistema diventano allora le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1x_1 + \alpha u \\ \dot{x}_2 = -k_2x_2 + (1-\alpha)u \\ \dot{x}_3 = (1-\beta)k_2x_2 \\ \dot{x}_4 = k_1x_1 + \beta k_2x_2 - k_4x_4 \\ y = k_4x_4 \end{cases} \quad (3)$$

Trovate per via analitica il nuovo equilibrio del sistema nel caso in cui $\bar{u} = 0$.

$\bar{x}_1 =$
 $\bar{x}_2 =$
 $\bar{x}_3 =$
 $\bar{x}_4 =$
 $\bar{y} =$

Commentate il risultato.

Analizzate ora il problema mediante simulazione con il foglio di lavoro di Excel. Ponete a zero la cella D3 (che contiene il valore del parametro k_3), e la cella I3 (valore dell'ingresso \bar{u}), facendo attenzione a reimpostare l'intervallo D8:D128 in modo che punti alla cella I3. Impostate inoltre la condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [2 \times 10^7 \ 1 \times 10^7 \ 1 \times 10^7 \ 1 \times 10^7]$

Commentate i risultati.

Provate a modificare le condizioni iniziali e commentate i risultati.

Trovate per via analitica il nuovo equilibrio del sistema nel caso in cui $u \neq 0$.

$\bar{x}_1 =$
 $\bar{x}_2 =$
 $\bar{x}_3 =$
 $\bar{x}_4 =$
 $\bar{y} =$

Commentate il risultato.

Analizzate nuovamente il problema mediante simulazione. Mantenete a zero la cella D3, azzerate le celle da J3 a M3 e inserite 100 000 nella cella I3 (verificate che i valori nell'intervallo D8:D128 vengano aggiornati al nuovo valore dell'ingresso). Commentate i risultati.

.....

.....
.....
Provate a modificare le condizioni iniziali e commentate i nuovi risultati.
.....
.....
.....
.....