Analisi a molti obiettivi
localizzazione di centrali elettriche

Data
Cognome **Nome**

1. Formulazione del problema

Si vogliono localizzare delle nuove centrali per la produzione di energia elettrica in 10 comuni. Sono note le popolazioni residenti in ciascun comune e le distanze tra un comune e l'altro. La potenza totale necessaria è pari a 50 MW. Il costo di ogni centrale è dato dalla somma di una quota fissa e di una quota variabile con costi marginali decrescenti:

$$C_i = C(W_i) = c_f \operatorname{sign}(W_i) + c_v[1 - e^{-0{,}1\, W_i}] \tag{1}$$

dove W_i è la potenza installata nella centrale i-esima, c_f = 6000, c_v = 4000 e $\operatorname{sign}()$ è la funzione segno (che ha valore 1 se l'argomento è positivo e valore 0 se l'argomento è nullo).

La produzione di energia implica emissioni in atmosfera che generano un danno per gli abitanti della zona. L'impatto dell'inquinamento è proporzionale alla potenza installata e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra la centrale e il paese. Per il paese nel quale si trova la centrale (per cui l'inverso della distanza non è definito) l'impatto è considerato pari a 10 volte quello massimo prodotto dalla stessa centrale negli altri paesi:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1{,}6 \frac{W_i}{d_{ij}^2}, & \text{per } i \neq j \\ 10 \max\limits_{j \neq i} \left(1{,}6 \frac{W_i}{d_{ij}^2}\right), & \text{per } i = j \end{cases} \tag{2}$$

dove I_{ij} è l'inquinamento prodotto dalla centrale i-esima nel paese j-esimo e d_{ij} è la distanza tra la centrale e il paese. Il danno causato dall'inquinamento nel paese j-esimo è proporzionale alla popolazione presente nel paese e al quadrato dell'inquinamento. Vale inoltre la sovrapposizione degli effetti, ovvero l'inquinamento complessivo è dato dalla somma degli inquinamenti delle diverse centrali:

$$D_j = 0{,}8 P_j \left(\sum_i I_{ij}\right)^2 \tag{3}$$

Gli obiettivi del problema sono la minimizzazione dei costi totali e la minimizzazione del danno totale causato dall'inquinamento:

$$\min_{W_i} \sum_i C_i, \qquad \min_{W_i} \sum_j D_j, \tag{4}$$

con i vincoli di soddisfare la domanda complessiva

$$\sum_i W_i \geq 50 \tag{5}$$

e di non negatività della potenza installata in ogni centrale

$$W_i \geq 0 \quad \forall i \tag{6}$$

1.1 Impostazione del foglio di lavoro

Scaricate il foglio di lavoro `6.1 gradiente e pesi.xls`[1], relativo alla prima parte dell'esercizio. Salvatelo in una cartella locale e apritelo. Assicuratevi che in basso a sinistra sia selezionato il foglio di lavoro `a`.

Mettete per ora a zero tutte le variabili di decisione (celle F18:O18), che rappresentano la potenza installata nelle diverse centrali. Nelle celle F28:O28 calcolate i costi associati alla produzione dell'energia (Eq. 1), utilizzando la funzione SEGNO(). Nella matrice I_{ij} (celle F32:O41, escluse le celle della diagonale) calcolate gli impatti parziali della centrale i-esima sul paese j-esimo (Eq. 2, caso $i \neq j$) in funzione della potenza installata e della distanza tra la centrale e il paese (ad esempio, nella cella G32 scrivete =1.6*G$18/G5^2; notate che, vincolando la sola riga della cella G18 con il simbolo $ (dollaro), potete copiare e incollare la formula nelle celle vicine senza doverla modificare). Per calcolare l'inquinamento nei paesi in cui si trovano le centrali (Eq. 2 caso $i = j$), ovvero per ottenere gli elementi della diagonale, identificate il valore massimo di ogni colonna (attenzione a <u>non</u> includere anche la cella della diagonale per non creare riferimenti circolari!) e poi moltiplicatelo per 10. Ad esempio, nella cella F32 inserite la formula =10*MAX(F33:F41). Calcolate ora il danno subito dal paese j-esimo (Eq. 3) nelle celle R32:R41. Calcolate infine il costo totale delle centrali come somma di tutti i costi nella cella E44 e il danno totale sui paesi come somma di tutti i danni nella cella Q44.

1.2 Soluzione del problema con il metodo dei pesi

Riconducete il problema a due obiettivi a un problema di programmazione non lineare a un solo obiettivo del tipo

$$\min_{W_i} J(W_i) = \min_{W_i}\left(w_1 \sum_i C_i + w_2 \sum_j D_j\right) \tag{7}$$

dove w_1 e w_2 sono i pesi associati ai due obiettivi dell'Eq. (4) (con $w_1 + w_2 = 1$) e i vincoli sono dati dalle equazioni (5) e (6).

Assegnate inizialmente i pesi $w_1 = 1$ e $w_2 = 0$ nelle celle N21 e O21. Quale sarebbe l'obiettivo di un decisore che operasse secondo questa coppia di pesi? ....
....
....

Calcolate la funzione obiettivo nella cella F23 come somma delle celle E44*N21 e Q44*O21. Impostate la verifica del vincolo (5) calcolando la potenza totale installata (somma delle celle F18:O18) nella cella F20.

Avviate il risolutore di Excel. Indicate la cella F23 come cella obiettivo, selezionate l'opzione di minimizzazione e indicate l'intervallo di celle F18:O18 come set di variabili di decisione. Inserite poi il vincolo di soddisfacimento della domanda (Eq. 5). Imponete il vincolo di non negatività (eq. 6) e selezionate l'algoritmo di soluzione *GRG* non lineare.

Osservate la soluzione ottenuta dal risolutore. Come è stata allocata la potenza installata nei diversi paesi?

i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
W_i										

La soluzione è ammissibile? ☐ sì ☐ no

Quanto vale la funzione obiettivo? J = ...

La soluzione ottenuta dal risolutore è effettivamente una soluzione ottima? Perché? (Ricordate che state considerando solo l'obiettivo economico, e pensate se – data la presenza di costi fissi – sia più conveniente costruire una sola centrale di potenza maggiore o numerose centrali di minore potenza).
....
....
....

[1] File scaricabile all'indirizzo https://bit.ly/2HJuNy5

....

Assegnate ora i pesi $w_1 = 0$ e $w_2 = 1$ nelle celle N21 e O21. Quale sarebbe l'obiettivo di un decisore che operasse secondo questa coppia di pesi? ....
....

<u>Azzerate tutte le variabili di decisione</u> (importante!) e avviate il risolutore di Excel. Osservate la soluzione ottenuta dal risolutore. Come viene allocata la produzione di energia in questo caso?

i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
W_i										

La soluzione è ammissibile? ☐ sì ☐ no

Quanto vale la funzione obiettivo? J = ...

Sareste in grado di determinare una soluzione migliore? Se sì, scrivetela nelle celle sottostanti.

i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
W_i										

Assegnate infine i pesi $w_1 = 0.5$ e $w_2 = 0.5$ nelle celle N21 e O21. Quale sarebbe l'obiettivo di un decisore che operasse secondo questa coppia di pesi? ....
....

<u>Azzerate tutte le variabili di decisione</u> (importante!) e avviate il risolutore di Excel. Osservate la soluzione ottenuta dal risolutore. Come viene allocata la produzione di energia in questo caso?

i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
W_i										

La soluzione è ammissibile? ☐ sì ☐ no

Quanto vale la funzione obiettivo? J = ...

Inserite ora il seguente vettore di variabili di decisione mantenendo invariati i pesi w_1 e w_2, e confrontate il valore della funzione obiettivo con quello precedentemente trovato.

i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
W_i	8	0	36	1	0	1	0	0	4	0

Quanto vale ora la funzione obiettivo? J = ...

La soluzione trovata da Excel è una soluzione ottima? ☐ sì ☐ no

Avviate ora il risolutore di Excel senza azzerare le variabili di decisione e lasciandole come sopra. Confrontate il risultato con la soluzione trovata in precedenza e con il vettore di variabili di decisione appena utilizzato come set iniziale. La soluzione cambia? ....
....
....
....

La ragione per cui Excel fatica a trovare una soluzione ottima è dovuta alla non linearità del problema (in particolare la funzione segno è fortemente non lineare). L'algoritmo di ottimizzazione può rimanere prigioniero di minimi locali senza riuscire ad uscirne. D'altra parte, i tempi computazionali per effettuare una ricerca esaustiva nello spazio delle soluzioni sarebbero proibitivi. Infatti, anche ipotizzando che la potenza delle centrali possa assumere solo valori interi compresi fra 0 e 50, il numero di possibili combinazioni di valori delle variabili di decisione sarebbe elevatissimo. Quante sarebbero esattamente? ....

Se il calcolo della funzione obiettivo richiedesse un nanosecondo (10^{-9} s), quanti anni sarebbero necessari a valutare tutte le soluzioni?...

1.3 Ordinamento delle alternative: analisi a molti obiettivi con metodo lessicografico

Considerate ora separatamente i due obiettivi di minimizzare i costi e di minimizzare i danni associati alla realizzazione delle centrali.

Selezionate ora il foglio di lavoro `b`, parzialmente preimpostato per effettuare l'analisi a molti obiettivi: in basso a sinistra cliccate sulla linguetta con il nome del foglio, in questo caso `b`.

La tabella sottostante riporta 6 alternative di allocazione dell'energia nei diversi paesi. Calcolate, utilizzando il foglio di lavoro precedente, i valori delle funzioni obiettivo per ognuna delle alternative considerate. Riportateli nella tabella e inserite tali valori nelle celle D7:E12.

alt.	**energia allocata**										**funzioni obiettivo**	
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**L**	**C**	**D**
a	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	....	....
b	0	0	25	0	0	25	0	0	0	0	....	....
c	10	0	10	0	0	30	0	0	0	0	....	....
d	8	0	36	1	0	1	0	0	4	0	....	....
e	13	0	29	0	0	5	0	0	3	0	....	....
f	10	0	28	0	1	6	0	0	5	0	....	....

I dati vengono automaticamente visualizzati nel grafico a lato delle celle. Quale alternative vi sembra preferibile? Perché? ....

Siete in grado di stabilire a occhio se qualcuna delle alternative è certamente dominata in senso paretiano? (ovvero se esiste un'alternativa migliore di essa rispetto a entrambi gli obiettivi) ....
....

Prima di procedere ad un'analisi più approfondita, è opportuno normalizzare i dati, in modo da riportare entrambi gli obiettivi allo stesso range di valori. Un criterio di normalizzazione un po' brutale ma estremamente semplice è quello di portare rispettivamente a 0 e a 1 i valori minimo e massimo di ogni obiettivo:

$$U_i = \frac{X_i - \min_i X_i}{\max_i X_i - \min_i X_i} \qquad (8)$$

dove X_i è il valore dell'obiettivo X (C o D) per l'i-esima alternativa e U_i è il suo valore normalizzato. Potete quindi calcolare con la formula (8) i valori normalizzati degli obiettivi per ogni alternativa. Inseriteli nelle celle D27:E32. I dati vengono automaticamente visualizzati nel grafico a lato.

Identificate ora l'alternativa migliore utilizzando il più semplice dei criteri, quello lessicografico. Ordinate pertanto le alternative rispetto a un singolo obiettivo. Potete farlo facilmente sfruttando la funzione RANGO(*Num*, *Rif*, *Ordine*) [RANGO()] di Excel. Tale funzione restituisce il rango del numero *Num* nell'elenco di numeri *Rif*, ovvero la sua grandezza relativa nell'elenco. L'opzione *Ordine* determina se l'ordinamento dev'essere ascendente (*Ordine* > 0) o discendente (*Ordine* = 0).

Determinate dapprima l'ordinamento in funzione del costo, inserendo nella cella D49 la formula =RANGO(D27;D$27:D$32;1) e copiandola nelle celle sottostanti. L'alternativa con il rango più basso è quella migliore in termini di costi. Operate in modo analogo nelle celle G49:G54 per ordinare le alternative in base al danno.

Qual è l'alternativa migliore dal punto di vista economico? ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

E quella migliore dal punto di vista ambientale? ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

1.4 Scelta delle alternative efficienti in senso paretiano

Nelle celle dell'area B56:M87 viene invece determinata automaticamente la frontiera di Pareto, ovvero l'insieme delle alternative che non sono dominate, in senso paretiano, da nessun'altra e per le quali, quindi, il decisore non può esprimere una preferenza senza definire l'importanza relativa dei due obiettivi (utilizzare il criterio lessicografico corrisponde a ipotizzare che un obiettivo sia infinitamente più importante dell'altro).

Che forma ha la frontiera di Pareto? Se avevate individuato una o più alternative dominate, la vostra osservazione è confermata dall'osservazione del grafico?...
....
....
....

1.5 Scelta delle alternative con metodo del punto utopia

Una volta determinata la frontiera di Pareto si procede alla scelta dell'alternativa che determina il migliore compromesso tra gli obiettivi. Uno dei metodi con cui può essere fatta questa operazione, nel caso in cui il decisore non intenda o non sia in grado di indicare i pesi da lui associati ai due obiettivi, è quello dell'utopia. Il metodo dell'utopia consiste nel determinare l'alternativa a distanza minima dal punto nello spazio degli obiettivi che rappresenta i minimi assoluti (e indipendenti) degli obiettivi stessi (tale punto, detto per l'appunto punto utopia, non è in generale realizzabile, come suggerito dal nome).

Calcolate le coordinate del punto utopia nelle celle C94 e D94 utilizzando i valori non normalizzati degli obiettivi. Calcolate poi la distanza euclidea di ogni alternativa dal punto utopia nelle celle D99:D104. Nelle celle G99:G104 determinate quindi il rango delle alternative in un ordinamento per distanza crescente dal punto utopia.

Qual è l'alternativa migliore secondo il criterio dell'utopia? ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Il risultato è coerente con l'osservazione del grafico della frontiera di Pareto? ☐ sì ☐ no

Valutate ora l'effetto della normalizzazione ricalcolando le coordinate del punto utopia nelle celle C109 e D109 utilizzando i valori normalizzati degli obiettivi. Calcolate poi la distanza euclidea e il rango delle alternative nelle celle C111:G119.

Qual è l'alternativa migliore ora? ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Il risultato è ora coerente con l'osservazione del grafico della frontiera di Pareto? ☐ sì ☐ no

1.6 Scelta delle alternative: analisi a molti obiettivi con metodo dei pesi

Un'altra possibilità, se il decisore è in grado di indicare le importanze relative degli obiettivi, è quella di utilizzare il criterio dei pesi, che consente di ricondursi a un problema di programmazione matematica analogo a quello visto al punto precedente.

Inserite la coppia di pesi $w_1 = 0{,}6$ e $w_2 = 0{,}4$ nelle celle C126 e D126. Nelle celle D129:D134 calcolate il valore della funzione obiettivo complessiva come somma pesata delle due funzioni obiettivo parziali (notate che essa differisce dalla funzione J dell'esercizio precedente perché i valori dei costi e dei danni sono stati normalizzati). Nella cella D136 calcolate poi il valore minimo tra quelli contenuti nelle celle D129:D134, che identifica quindi l'alternativa ottima secondo il criterio dei pesi.

Qual è l'alternativa migliore secondo i pesi scelti? ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Il grafico predisposto a lato consente di visualizzare graficamente la determinazione della soluzione ottima e come questa cambia al variare dei pesi associati ai due obiettivi. L'alternativa ottima è identificata dal punto di tangenza della retta blu con la frontiera di Pareto. La retta blu ha infatti pendenza pari al rapporto tra i pesi associati ai due obiettivi.

Modificate ora i valori dei pesi e osservate come cambia la soluzione ottima. Quali considerazioni potete trarne? ....
....
....
....

Vi sembra giustificata la pratica comune di selezionare le alternative vicine al “gomito” della frontiera di Pareto come alternative di miglior compromesso? Perché? ....
....
....
....
....

Analisi a molti decisori
Un problema di pesca

1. Maracaibo e Punto Fijo

Le flotte di pescherecci di Maracaibo e Punto Fijo in Venezuela pescano dalla stessa popolazione di gamberetti del lago Maracaibo.

I profitti annuali delle due flotte possono essere calcolati come (m=Maracaibo, p=Punto Fijo):

$$J_m(t) = p_m\, x(t)\, \frac{U_m}{U_m+U_p}\left[1 - e^{-U_m-U_p}\right] - 0{,}8U_m \tag{1}$$

$$J_p(t) = p_p\, x(t)\, \frac{U_p}{U_m+U_p}\left[1 - e^{-U_m-U_p}\right] - 0{,}3U_p \tag{2}$$

dove $p_m = 6{,}2$ e $p_p = 5{,}7$ sono i prezzi di vendita dei gamberetti al mercato delle due città, $x(t)$ è il numero di gamberetti nell'anno t, U_m e U_p sono il numero di pescherecci in ciascuna città (in centinaia di barche) e $0{,}8$ e $0{,}3$ sono i costi operativi di tali pescherecci.

Assumendo che la popolazione di gamberetti, espressa in termini di densità, evolva secondo il seguente modello

$$x(t+1) = 2{,}2\, x(t) - 0{,}12\, x^2(t) - x(t)\left[1 - e^{-U_m-U_p}\right] \tag{3}$$

dove l'ultimo termine rappresenta la mortalità dovuta alla pesca (contenuta infatti anche nelle equazioni 1 e 2), con una popolazione iniziale pari a $x(0) = 2$, determinare il numero ottimale di pescherecci in ciascuna flotta per massimizzare il profitto nel lungo periodo.

1.1 Massimizzare il profitto: soluzione centralizzata

Scaricate il foglio di lavoro `6.2 pesca.xls`[2], parzialmente preimpostato per risolvere l'esercizio. Salvatelo in una cartella locale e apritelo. Create un grafico che mostri l'andamento della popolazione di gamberetti in funzione del tempo e un secondo grafico a dispersione che mostri l'andamento nel tempo dei guadagni *Jm* e *Jp* delle due flotte.

Calcolate ora il numero ottimale di pescatori così da massimizzare il profitto all'equilibrio. Impostate una cella obiettivo uguale alla somma dei guadagni che si ottengono a $t = 40$, quando l'evoluzione del sistema si è stabilizzata. Utilizzate quindi il risolutore per trovare la grandezza delle due flotte di pescherecci che massimizza il guadagno totale nel sistema.

La popolazione di gamberetti sopravvive allo sfruttamento? ☐ sì ☐ no

A quanto ammonta la popolazione? $x(t = 40)$ = ...

[2] File scaricabile all'indirizzo https://bit.ly/2KcfQX7

Quali sono i guadagni nella soluzione ottimale trovata? Pensate che i pescatori di Punto Fijo siano contenti di una suddivisione del genere? ....
....
....

1.2 Ottimizzazione autonoma

Se le due flotte potessero decidere autonomamente, cosa succederebbe? È chiaro che la flotta di Maracaibo non vorrebbe cambiare una simile situazione, in cui il guadagno che ottiene è il massimo possibile. Cosa faranno i pescatori di Punto Fijo?

Per rispondere studiate gli effetti congiunti delle dimensioni delle due flotte, data una quantità fissata a priori di gamberetti. Scrivete in una cella libera un riferimento all'ultimo valore calcolato nella simulazione della quantità di gamberetti $x(t = 40)$ e in una cella adiacente, aggiungete il testo "x40" per ricordarvi il contenuto. In uno spazio libero, create una riga con 6 valori di U_m, da 0,1 a 1,1; nella colonna a sinistra del primo valore, mettete i medesimi valori per U_p. All'interno di questa tabella, calcolate il valore di J_m data la x e i valori di U_m e U_p. Un esempio è dato in figura.

		u_m					
	J_m	**0,1**	**0,3**	**0,5**	**0,7**	**0,9**	**1,1**
u_p	**0,1**	1,04386933	2,82602357	4,26227976	5,41478074	6,33446544	7,06309246
	0,3	0,94200786	2,55736786	3,86770053	4,92680645	5,77889383	6,46029815
	0,5	0,85245595	2,32062032	3,51914746	4,4946952	5,28569849	5,92383218
	0,7	0,77354011	2,11148848	3,21049657	4,11109882	4,84677179	5,44517954
	0,9	0,70382949	1,92629794	2,93649916	3,76971139	4,45514689	5,01701337
	1,1	0,64209931	1,7618995	2,69265099	3,46511425	4,10482912	4,63302042

Create una tabellina simile per calcolare J_p. Ora create una terza tabella, utilizzando le stesse intestazioni con gli stessi valori di U_m e U_p. Agli incroci mettete però i guadagni congiunti delle due flotte: inserite la formula *=CONCATENA(TESTO(I7;"#0,0#");" / ";TESTO(I16;"#0,0#"))* dove I7 è la cella che contiene il valore di J_m e I16 contiene il valori J_p per la coppia di U_m e U_p.

Questo modo di mostrare i guadagni congiunti è tipico della teoria dei giochi, dove viene usato per studiare i possibili esiti di un processo decisionale con molteplici decisori autonomi. È chiamata matrice dei *payoff* e si può usare in questo modo: scegliete la colonna con il valore di U_m più vicino a quanto trovato al punto **1.1** dell'esercitazione. In ogni cella della colonna, la metà di sinistra indica il guadagno della flotta di Maracaibo al crescere della flotta di Punto Fijo U_p, il cui guadagno si legge nella metà di destra.

Quale valore di U_p sceglieranno i pescatori di Punto Fijo per massimizzare il proprio guadagno, sapendo che i pescatori di Maracaibo useranno la dimensione ottima della flotta calcolata al punto **1.1**? ....
....

Inserite tale valore come parametro della simulazione. A quanto ammonta ora la popolazione all'equilibrio? $x(t = 40)$ = ...
Quali sono i guadagni nella soluzione ottimale trovata? La loro somma è minore della soluzione centralizzata? ....
....
....

Se i pescatori di Maracaibo disponessero del nostro foglio di calcolo, potrebbe adattare il numero dei loro pescherecci conoscendo la risposta dei pescatori di Punto Fijo. Se avete composto il foglio di calcolo correttamente, si dovrebbe essere aggiornata la quantità di gamberetti sulla quale è calcolata la matrice del *payoff*. Usiamola ora per calcolare la risposta di Maracaibo. Scegliamo la riga corrispondete al valore di U_p scelto in precedenza e cerchiamo il massimo di J_m, a sinistra della barra. A quale valore di flotta U_m corrisponde? ....
....

Inserite tale valore come parametro della simulazione. A quanto ammonta ora la popolazione all'equilibrio? $x(t = 40)$ = ...
Quali sono ora i guadagni? La loro somma è minore della soluzione precedente? ....
....
....