

POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento di Elettronica e Informazione

# Modelli stocastici per la previsione di piene del fiume Brembo



Ing. Giorgio Corani [corani@elet.polimi.it](mailto:corani@elet.polimi.it)  
Prof. Giorgio Guariso [guariso@elet.polimi.it](mailto:guariso@elet.polimi.it)

# Inquadramento idrologico e pluviometrico

## Analisi idrologica

Questa sezione presenta una serie di elaborazioni statistiche contenute nel “*Piano Territoriale Provinciale della Provincia di Bergamo*”, realizzate nel luglio 1994 dallo studio Paoletti.

L'unica sezione fluviale della Val Brembana in cui la serie delle rilevazioni storiche è tale da permettere di effettuare delle attendibili valutazioni statistiche è quella di Ponte Briolo, che sottende un bacino di 765 kmq. L'analisi delle portate utilizza i dati di frequenza *giornaliera* raccolti presso l'idrometro nel periodo 1940-1973; la portata media su questo periodo è di 30.6 mc/sec.

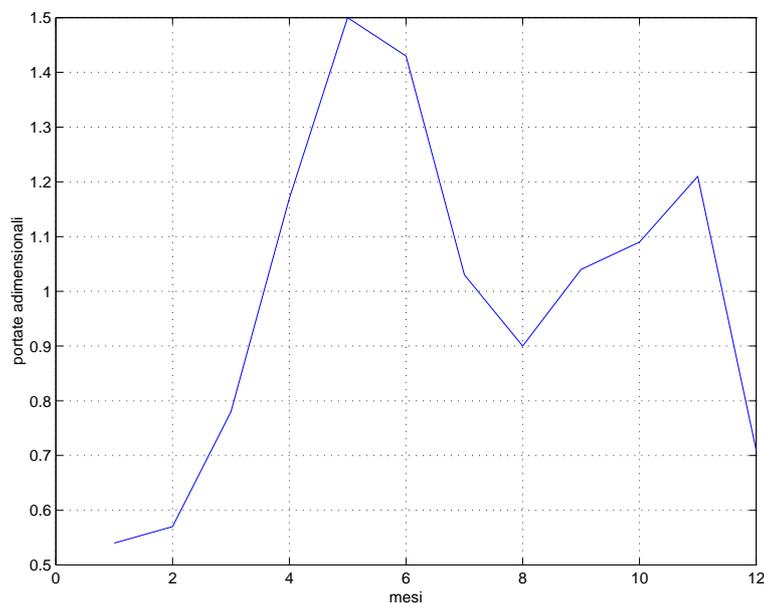


Figura 1: *Portate medie mensili adimensionali*

La Fig.1 presenta il regime delle portate medie mensili, adimensionalizzate rispetto alla portata media annua. I picchi di portata media si hanno nei mesi di maggio, a causa delle piogge e dello scioglimento delle nevi, e a novembre, quando il picco è invece determinato dalle abbondanti precipitazioni. Per capire quali siano precisamente i mesi più temibili dal punto di vista delle piene, *sarebbe necessario disporre anche dei valori mensili di massimo e di scarto quadratico medio, rappresentativi dell'entità dei picchi e della regolarità del regime delle portate*. Gli eventi di piena oggetto di questo studio hanno avuto luogo nei periodi di *fine agosto e inizio novembre* e lasciano supporre che gli interi periodi primaverili e autunnali siano potenzialmente soggetti a eventi di piena.

La *curva di durata delle portate*, presentata in Fig.2, associa ad ogni valore di portata il numero medio di giorni in cui, durante l'anno, questo viene uguagliato o superato. Il più importante dato per quanto riguarda le alte portate è quello relativo al primo punto della curva, che mostra come, in media, per 10 giorni l'anno si registri una portata uguale o superiore ai 120 mc/sec.

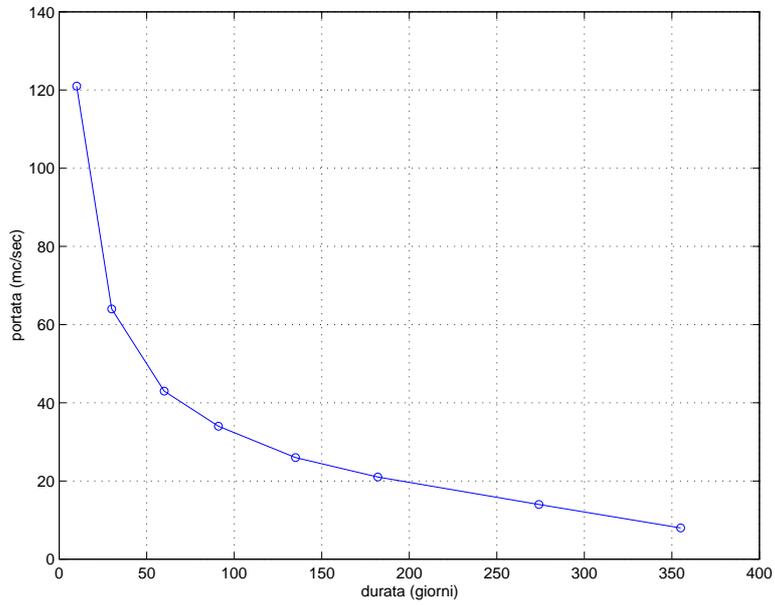


Figura 2: *Curva di durata del fiume Brembo presso l'idrometro di Briolo*

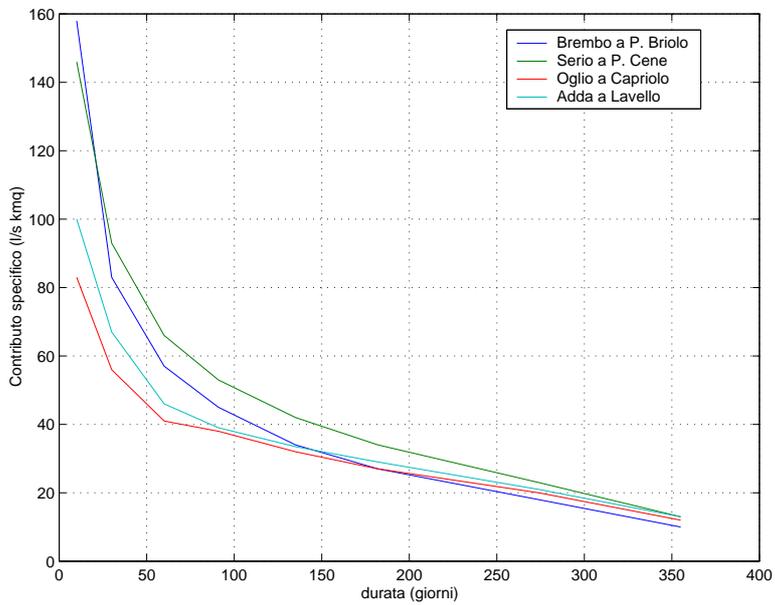


Figura 3: *Contributo specifico di assegnata durata [l/s kmq] di alcuni fiumi della provincia di Bergamo*

Dividendo il valore della curva di durata della portata per l'estensione del bacino afferente si ottiene la curva di durata media dei contributi specifici, espressi in  $l/s km$ . La Fig.3 confronta la curva di durata media dei contributi specifici del Brembo con quelle dei più importanti fiumi della provincia di Bergamo: Serio, Adda e Oglio. Dal momento che Brembo e Serio non sono regolati da bacini lacustri, su questi bacini si riscontrano, sulle brevi durate (e quindi sulle portate più elevate), contributi specifici molto superiori (+50, +100%) a quelli di Adda e Oglio. In particolare, per un valore di durata di 10 giorni, *il contributo specifico del Brembo (158  $l/s kmq$ ) risulta superiore anche a quello del Serio (146  $l/s kmq$ )*, nonostante questo sottenda un più ridotto bacino imbrifero.

L'analisi probabilistica dei tempi di ritorno associati ai *massimi* valori dei contributi specifici (vedi Tab.1) è compiuta tramite la formula di Gherardelli e Marchetti. Coerentemente con quanto già osservato nell'analisi di durata dei contributi medi, *i contributi unitari del Brembo risultano superiori (+30%) a quelli del Serio*, e delineano una situazione naturale di maggiore esposizione al rischio idrogeologico della valle Brembana rispetto alla valle Seriana.

| <i>T (anni)</i> | <i>Brembo (mc/s kmq)</i> | <i>Serio (mc/s kmq)</i> |
|-----------------|--------------------------|-------------------------|
| 2               | 2.63                     | 1.45                    |
| 5               | 3.43                     | 1.89                    |
| 10              | 3.96                     | 2.18                    |
| 20              | 4.47                     | 2.46                    |
| 50              | 5.13                     | 2.82                    |
| 100             | 5.62                     | 3.08                    |

Tabella 1: *Contributi specifici al colmo stimati per assegnati tempi di ritorno*

Per quanto riguarda nello specifico lo studio delle portate di piena, l'analisi dei campioni delle portate al colmo condotta nel Piano Territoriale stima le portate massime attese per assegnati tempi di ritorno, presentate in Tab.2, utilizzando la legge di probabilità di Gumbel. I valori, stimati in base alle rilevazione degli anni 1940 -1973, sembrano però, alla luce delle piene degli anni 96 e 99, sottostimati; ad es. viene calcolato un tempo di ritorno di 10 anni per una portata di soli 781 mc/sec, mentre i due eventi dell'agosto e del novembre 1996 hanno avuto picchi rispettivamente di 737 e 799 mc/sec, e l'evento del 1999 ha avuto un picco di 795 mc/sec.

| <i>T(anni)</i> | <i>Portata (mc/s)</i> | <i>T(anni)</i> | <i>Portata (mc/s)</i> |
|----------------|-----------------------|----------------|-----------------------|
| 2              | 518                   | 100            | 1108                  |
| 5              | 676                   | 200            | 1205                  |
| 10             | 781                   | 500            | 1333                  |
| 50             | 1011                  | 1000           | 1430                  |

Tabella 2: *Portate al colmo stimate per assegnati tempi di ritorno*

## Analisi pluviometrica

L'analisi dei dati pluviometrici presente nel Piano Territoriale Provinciale individua, per ogni stazione, la curva di possibilità pluviometrica

$$h(T) = a(T)d^{n(T)}$$

che lega l'altezza  $h$  delle precipitazioni alla durata  $d$  e al tempo di ritorno  $T$ . Stimati i parametri per ognuna delle stazioni pluviometriche considerate, lo studio costruisce le carte delle linee *iso-a* e *iso-n* mediante l'algoritmo del Kriging. Le carte mostrano una diversa distribuzione geografica delle precipitazioni orarie rispetto a quelle giornaliere. In particolare le precipitazioni *orarie*, lungo la valle, decrescono da sud verso nord raggiungendo valori minimi sullo spartiacque orobico, e inoltre decrescono spostandosi da ovest verso est. Per quanto attiene invece le precipitazioni *giornaliere*, queste crescono dallo spartiacque con la Valtellina fino a San Pellegrino, per poi decrescere a valle di San Pellegrino (pag. 117/118 del *Piano Territoriale*).

L'andamento complessivo delle curve indica una maggiore esposizione della Val Brembana ad eventi pluviometrici di breve durata e forte intensità rispetto alla Val Seriana: ad es., la stazione di S.Martino de' Calvi registra valori di precipitazione oraria pari a  $55mm$ , rispetto ai  $29/32mm$  dell'alta Val Seriana. L'analisi di questi dati, uniti alle precedenti considerazioni sui valori dei contributi specifici al colmo, *conferma la maggiore esposizione della Val Brembana, rispetto alla vicina Val Seriana, al rischio di eventi alluvionali.*

## Ricognizione dei dati disponibili

### Individuazione degli eventi di piena

Modelli matematici per la previsione delle piene su un bacino caratterizzato da una ridotta estensione, e dunque da una dinamica veloce, come quello del Brembo, richiedono la disponibilità di dati di passo almeno orario.

Gli eventi di piena su cui sono stati reperibili dati con questo tipo di frequenza, poi utilizzati nella fase di taratura dei modelli, sono quelli del *28/29 agosto 1996* e del *11/17 novembre 1996*. L'evento dell'agosto 96 ha un picco di  $740 mc/sec$ ; l'evento di novembre è invece costituito da un primo picco, di circa  $180 mc/sec$ , in data 12/11, ed un successivo, molto maggiore, di oltre  $800 mc/sec$ , in data 14/11. La Fig. 4 mostra la serie delle portate ottenuta concatenando i due eventi, e in Tab.3 viene presentato il set di dati disponibili sui due eventi. La serie di taratura definita consta di 232 passi orari; il concatenamento dei due eventi è stato realizzato a bassi valori di portata (circa  $60 mc/sec$ ), e curando che i dati precedenti il punto di concatenamento fossero a pioggia nulla, in modo da "scaricare" la

memoria del modello: in questo modo si evitano distorsioni dovute alla vicinanza della discesa del primo picco con la salita del secondo.<sup>1</sup>

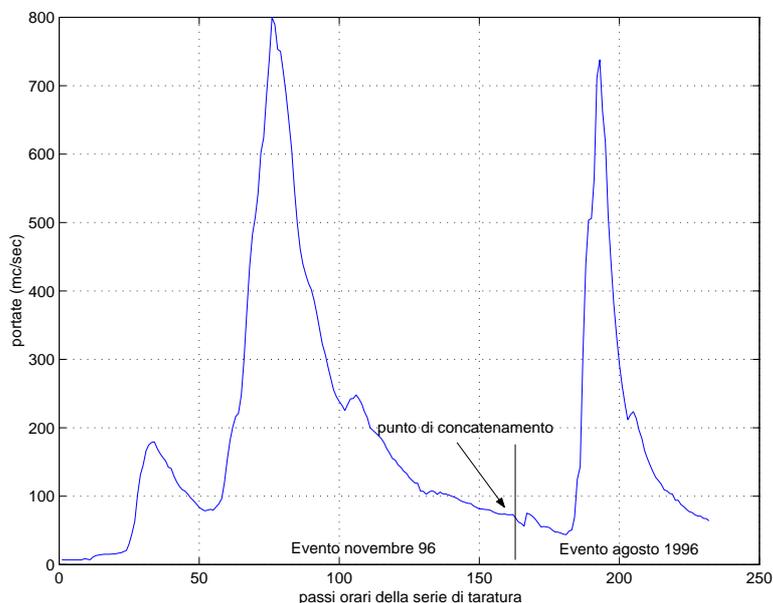


Figura 4: Serie di dati di taratura, ottenuta concatenando i due eventi. Per motivi tecnici, è stato anteposto l'evento di novembre a quello di agosto.

Interessante è l'esame delle statistiche dei dati di precipitazione oraria sull'intera serie di taratura, presentate in Tab.4. I dati mostrano che la parte alta del bacino (Foppolo, Valtorta, Pza Brembana) è stata interessata da precipitazioni intense e costanti (tra il 40% ed il 64% di ore piovose), con valori totali di pioggia caduta più che doppi rispetto a quelli di fondovalle (Briolo). A Briolo invece, le

<sup>1</sup>I parametri così identificati sono stati confrontati con quelli stimati avendo definito *ad hoc* la matrice  $M$  delle osservazioni nell'algoritmo dei minimi quadrati. Viene spiegato per semplicità come costruire tale matrice nel caso di un modello  $arx11$  senza ritardi. Se supponiamo che il primo evento abbia inizio all'istante  $0$  e fine all'istante  $20$ , e il secondo inizi invece all'istante  $70$ , la matrice  $M$  è così composta:

$$\begin{array}{cc}
 y_0 & u_0 \\
 y_1 & u_1 \\
 \vdots & \vdots \\
 y_{20} & u_{20} \\
 y_{70} & u_{70} \\
 y_{71} & u_{71} \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Questa metodologia è formalmente la più rigorosa, in quanto garantisce che i due eventi non interferiscano nella stima dei parametri. La correttezza dell'approccio utilizzato nel presente studio è avvalorata dal fatto che i parametri stimati con i due diversi metodi non hanno mai mostrato una differenza superiore a  $1/1000$  del loro valore.

| Stazione   | Sensore  | Unità di misura | %Dati validi | Passo  | Fonte                       |
|------------|----------|-----------------|--------------|--------|-----------------------------|
| Briolo     | Idrom.   | cm              | 100%         | 15min  | Cons. media pian. bergam.   |
| Briolo     | Pluviom. | mm              | 100%         | orario | Consorzio dell'Adda         |
| Foppolo    | Pluviom. | Decimo di mm    | 100%         | orario | Istituto idrografico del Po |
| Valtorta   | Pluviom. | Decimo di mm    | 100%         | orario | Istituto idrografico del Po |
| Pza Bremb. | Pluviom. | Decimo di mm    | 100%         | orario | Istituto idrografico del Po |

Tabella 3: *Set di dati disponibili sugli eventi di piena dell'agosto e del novembre 1996*

piogge si sono concentrate in poche ore (23% di ore piovose), assumendo però *valori orari di picco notevolmente superiori rispetto all'alto bacino.*

Le statistiche presentate confermano l'andamento delle curve di possibilità pluviometrica del Piano Territoriale, che individuano *per i massimi delle piogge orarie un andamento decrescente risalendo da fondovalle verso la parte alta del bacino.*

| Stazione     | max | media | totale | % ore piovose | dev. st. |
|--------------|-----|-------|--------|---------------|----------|
| Foppolo      | 106 | 15.3  | 3550   | 64%           | 22       |
| Valtorta     | 300 | 21.72 | 5040   | 61%           | 40.65    |
| Pza Brembana | 244 | 14    | 3250   | 39%           | 30.5     |
| Briolo       | 410 | 7.7   | 1784   | 23%           | 35.8     |

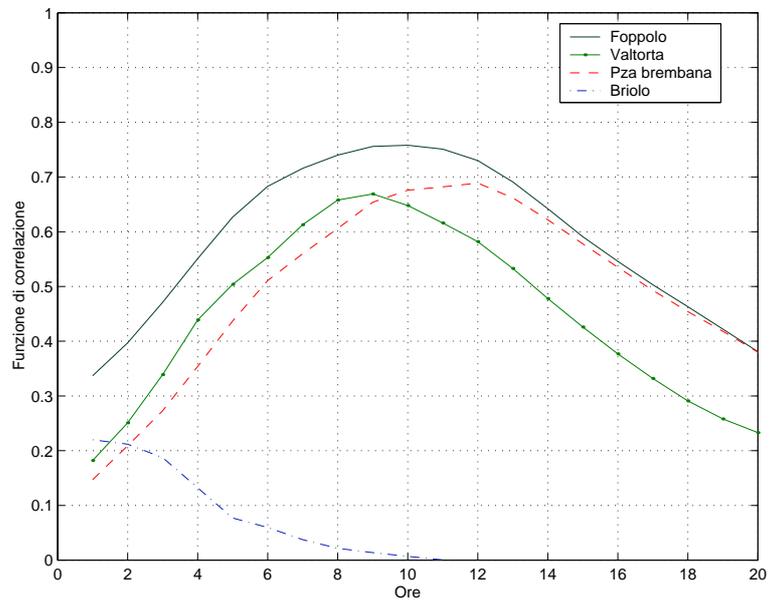
Tabella 4: *Statistiche dei dati di pioggia orari relativi alla intera serie di taratura. I dati sono espressi in decimi di mm.*

## Esame delle correlazioni tra piogge e portate

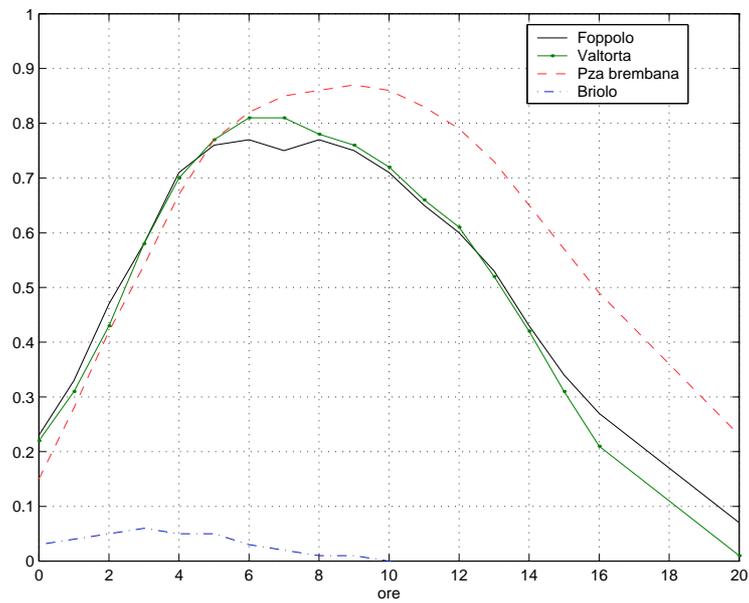
Al fine di individuare ordini e ritardi degli ingressi del modello che si vuole costruire, sono state calcolate le funzioni di correlazione fra le portate, misurate all'idrometro di Briolo, e le piogge registrate nelle quattro stazioni. La funzione di correlazione, che ha valore unitario quando tra le due variabili esiste una relazione lineare, permette di capire quali informazioni siano utilizzabili con maggiore profitto da parte appunto di modelli lineari, come gli *arx* oggetto di questo studio.

La Fig.5.a mostra tali funzioni. Si osservi che:

- contrariamente a quello che succede per i pluviometri (*Foppolo, Valtorta, Pza Brembana*) siti nella parte alta del bacino, l'andamento delle piogge a *Briolo* risulta scorrelato dall'andamento delle portate; questo è un comportamento prevedibile, dovuto al fatto che le piogge si traducono in variazioni delle portate solo *a valle del punto in cui sono cadute*. Inoltre, siccome l'altezza di pioggia caduta sulle stazioni dell'alto bacino è circa doppia rispetto a quella registrata a Briolo, si può concludere che *proprio queste sono le stazioni più importanti per la previsione delle portate*;
- tra le stazioni della parte alta del bacino, i massimi della funzione di correlazione si hanno, a seconda della stazione, per piogge cadute nelle 9/12 ore precedenti la misurazione di portata.



(a) Funzioni di correlazione tra piogge e portate, calcolate sulla intera serie di taratura



(b) Funzioni di correlazione tra piogge e portate, specializzate per portate superiori a 200 mc/sec

Figura 5: Correlazioni tra piogge e portate: le funzioni, per un assegnato valore  $\tilde{x}$  di ore, indicano la correlazione fra le portate e le piogge registrate  $\tilde{x}$  ore prima al pluviometro in esame.

Le funzioni sono calcolate sull'intera serie di taratura presentata in Fig.4; dunque molti dati (circa il 70%) riguardano le fasi di innesco ed esaurimento della piena, in cui le portate sono molto inferiori ai valori di picco. Se si studiano le funzioni di correlazione specializzate sui valori di portata superiori ai  $200 \text{ mc/sec}$ , si osserva (vedi Fig.5b) che i valori delle correlazioni diventano più alti e i picchi delle funzioni risultano anticipati. Questo comportamento può essere spiegato considerando che durante la piena i tempi di corrivazione si riducono, a causa dell'imbibimento del terreno e della velocità di propagazione dell'onda, e che in questa situazione le variazioni di portate sono legate ancora più strettamente alle piogge.

Da questo si può concludere che l'utilità marginale dell'informazione relativa alle piogge registrate a Briolo sia modesta, e che dunque modelli con tutti i quattro ingressi di pioggia possano avere prestazioni molto simili a quelli che utilizzano solamente i tre ingressi delle stazioni alte sul bacino.

Essendo inoltre tutte le 3 stazioni "alte" significativamente correlate con le piogge, ci si aspetta che modelli che utilizzino anche uno solo di questi ingressi (peculiarità che può essere molto utile nel caso in cui ci siano problemi a raccogliere in tempo reale i dati trasmessi da tutte le stazioni) possano fornire una previsione che, pur meno precisa di quella fornita dai più complessi modelli con più ingressi, rimanga comunque attendibile.

In questo senso, lo studio delle correlazioni reciproche tra le stazioni pluviometriche, presentato in Tab.5, evidenzia che:

- le stazioni di Foppolo, Pza Brembana sono molto correlate (circa 0.8) tra di loro e con la serie delle portate; dunque modelli che utilizzino uno solo di questi ingressi avranno una discreta affidabilità, e prestazioni presumibilmente molto simili;
- la stazione di Valtorta, appare meno correlata (0.6) con entrambe le stazioni di Foppolo e Valtorta, ed è la stazione su cui si sono avute le maggiori precipitazioni. Per questi motivi il suo utilizzo appare appropriato sia in un modello ad un solo ingresso, che in modello a due ingressi, il rimanente dei quali sia una delle due stazioni suddette;
- la stazione di Briolo risulta scorrelata con tutte le altre stazioni, e in questo senso è una potenziale apportatrice di informazione non ridondante con quella degli altri pluviometri. D'altronde la scarsa correlazione con la serie delle portate suggerisce di utilizzare questo dato solo in modelli a più ingressi, come complemento all'informazione ricavabile dagli altri pluviometri.

Infine, un'alternativa all'utilizzo di un ingresso per ognuna delle stazioni considerate, è quella di definire un modello che abbia un unico ingresso, costituito dalla stima della pioggia media caduta sul bacino imbrifero. A questo scopo è stato utilizzato il metodo dei topoietai che definisce, per ogni pluviometro, una "regione di influenza", all'interno della quale si suppone che la pioggia sia costante e uguale in valore a quella misurata al pluviometro.

I poligoni dei topoietai vengono definiti tracciando le perpendicolari alle congiungenti le stazioni di misura; la conseguente ripartizione del bacino imbrifero in quattro aree è presentata in tavola 1.

La Tab.6 mostra le estensioni e i pesi dei diversi topoietai.

|                     | <i>Foppolo</i> | <i>Valtorta</i> | <i>Pza Brembana</i> | <i>Briolo</i> |
|---------------------|----------------|-----------------|---------------------|---------------|
| <i>Foppolo</i>      |                | 0.65 [1]        | 0.82 [0]            | 0.36 [0]      |
| <i>Valtorta</i>     | 0.62 [0]       |                 | 0.57 [0]            | 0.31 [1]      |
| <i>Pza Brembana</i> | 0.83 [0]       | 0.66 [2]        |                     | 0.30 [0]      |
| <i>Briolo</i>       | 0.36 [0]       | 0.20 [5]        | 0.30 [0]            |               |

Tabella 5: *Massimi delle curve di correlazione fra le piogge registrate in diverse stazioni pluviometriche. Il numero tra parentesi indica il ritardo della serie di colonna rispetto a quella di riga in corrispondenza del quale si ha il picco di correlazione.*

| <i>Stazione</i> | <i>Area (kmq)</i> | <i>Peso</i> |
|-----------------|-------------------|-------------|
| Briolo          | 215               | .28         |
| Foppolo         | 126               | .16         |
| Pza Brembana    | 309               | .40         |
| Valtorta        | 113               | .16         |

Tabella 6: *Pesi ed estensioni dei topoieti relativi ai quattro pluviometri*

## Identificazione dei modelli

I modelli stocastici realizzati hanno come variabile di processo  $y$  le portate in transito alla sezione di Briolo, ricavate mediante la scala delle portate dalle altezze misurata all'idrometro. Sono stati testati modelli con differenti numeri di ingressi. *Si consiglia di utilizzare per le previsioni i modelli a quattro ingressi, caratterizzati dalla maggiore precisione predittiva, e ricorrere invece ai modelli con minore numero di ingressi solo se non è possibile raccogliere i dati registrati da tutti i pluviometri.* In quel caso infatti, solo tali modelli riescono a rendere disponibile una previsione.

Si è scelto di identificare un modello ad un solo ingresso per ognuna delle stazioni site nell'alto bacino, al fine di potere disporre di una previsione anche nel caso d'emergenza in cui funzioni uno solo di questi pluviometri.

Considerando che identificare un modello per ogni possibile configurazione di funzionamento o fuori servizio dei pluviometri avrebbe appesantito di molto l'utilizzo del sistema di previsione, e che non sempre il disporre di più pluviometri corrisponde ad un effettivo arricchimento della situazione informativa, si è scelto di identificare i modelli relativi solo ad alcune delle possibili situazioni con 2/3 stazioni attive. Tali situazioni, in cui si ha un reale vantaggio nell'utilizzo contemporaneo di più informazioni pluviometriche, sono state individuate basandosi sulla analisi di correlazione reciproca fra le stazioni. Ad es., data la elevata correlazione fra le stazioni di Foppolo e Piazza Brembana, non è stato identificato un modello specifico per la situazione di funzionamento contemporaneo di questi due soli pluviometri.

Sono stati inoltre identificati due diversi modelli a quattro ingressi (da utilizzare nella previsione

fino a 3 passi avanti o 4 passi avanti<sup>2</sup>), che utilizzano tutta l'informazione possibile, e che hanno ovviamente la maggiore accuratezza predittiva.

*La serie di taratura è stata volutamente specializzata sugli episodi di piena, come spiegato nei precedenti paragrafi, e questo può comportare previsioni poco affidabili (previsioni di portate nulle o inferiori allo zero) se i modelli vengono utilizzati in regime di morbida.*

Inoltre, siccome la serie consta di due soli episodi, *i parametri stimati non possono ritenersi del tutto affidabili: si consiglia una ritaratura degli stessi nel caso siano disponibili nuovi dati di episodi di piena, al fine di eliminare una eventuale sovra-aderenza ai dati.*

Come si può notare dalle tabelle presentate in Appendice, per alcuni parametri è stato stimato un *valore negativo*; questo fatto, solitamente indicativo di una configurazione non assestata dei parametri, è invece in questo caso da attribuirsi almeno per buona parte alle particolarità delle serie temporali, che presentano brusche impennate e discese nei valori di portate.

## Modelli con un unico ingresso

Si sono realizzati modelli stocastici ad un solo ingresso per ognuna delle stazioni poste sull'alto bacino, in modo che, in caso di emergenza, ammesso che siano disponibili in tempo reale le misurazioni *almeno di un pluviometro*, sia possibile disporre di una previsione. E' stato poi testato un modello con un unico ingresso di pioggia media, ottenuta come media pesata delle piogge cadute su tutte le quattro stazioni del bacino, secondo la ripartizione del territorio in topoletti presentata nella tavola allegata.

Non è stato invece realizzato un modello che utilizzi la pioggia caduta a Briolo, data l'evidente scorrelazione di questa con l'andamento delle portate. I modelli realizzati hanno una parte regressiva di ordine 4, un unico ingresso di ordine 3, e un ritardo dell'ingresso, che, ottimizzato caso per caso, è risultato comunque sempre di due ore; *ciò implica per i modelli un uguale orizzonte massimo previsionale di due ore*. La Tab.7 presenta gli indicatori statistici previsionali.

<sup>2</sup>Per la stima della portata su un orizzonte di due o più passi si utilizza una procedura ricorsiva.

Ad es., supponendo di lavorare con un modello ad un unico ingresso, con ordine 4 della parte autoregressiva e 3 dell'ingresso, e ritardo  $\tau = 2$ :

- si stima il valore  $\hat{y}_{t+1}$  previsto per il passo temporale successivo tramite l'equazione :

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-1) + \alpha_3 y(t-2) + \alpha_4 y(t-3) + \beta_{12} u(t-1) + \beta_{13} u(t-2) + \beta_{14} u(t-3)$$

- si utilizza in modo ricorsivo la medesima equazione, *avendo cura di riferire i coefficienti della parte autoregressiva e dell'ingresso all'istante successivo a quello cui erano riferiti nella stima di  $\hat{y}_{t+1}$  e utilizzando  $\hat{y}_{t+1}$  come realizzazione di portata per il tempo  $t+1$ :*

$$\hat{y}_{t+2} = \alpha_1 \hat{y}_{t+1} + \alpha_2 y(t) + \alpha_3 y(t-1) + \alpha_4 y(t-2) + \beta_{12} u(t) + \beta_{13} u(t-1) + \beta_{14} u(t-2)$$

Nello stesso modo è possibile generare le previsioni  $\hat{y}_{t+3}, \hat{y}_{t+4}$  ecc. Si noti che il massimo orizzonte  $k$  previsionale possibile coincide con il minimo tra i ritardi ( $\tau_1, \tau_2, \dots$ ) dei diversi ingressi del modello, aumentato di uno:

$$k = \min(\tau_1, \tau_2, \dots) + 1$$

Oltre tale orizzonte infatti, vengono a mancare i dati di tale ingresso e non è possibile continuare la previsione.

|           | <i>Correlazione vero/previsto</i> |             |               |              | <i>Varianza non spiegata</i> |             |               |              | <i>Errore medio</i> |             |               |              |
|-----------|-----------------------------------|-------------|---------------|--------------|------------------------------|-------------|---------------|--------------|---------------------|-------------|---------------|--------------|
|           | <i>Fopp</i>                       | <i>Valt</i> | <i>P.Brem</i> | <i>Media</i> | <i>Fopp</i>                  | <i>Valt</i> | <i>P.Brem</i> | <i>Media</i> | <i>Fopp</i>         | <i>Valt</i> | <i>P.Brem</i> | <i>Media</i> |
| <b>1h</b> | 0.99                              | 0.99        | 0.99          | 0.99         | .084                         | .076        | .085          | .087         | 1.05                | 0.95        | 1.07          | 1.15         |
| <b>2h</b> | 0.99                              | 0.99        | 0.99          | 0.99         | .146                         | .133        | .150          | .157         | 1.82                | 1.67        | 1.88          | 1.98         |

Tabella 7: *Indici statistici prestazionali dei modelli ad un unico ingresso realizzati*

Gli indicatori calcolati mostrano che i modelli che utilizzano come ingresso Foppolo o Piazza Brembana hanno indici prestazionali molto vicini, come peraltro atteso, vista l'alta correlazione reciproca delle due informazioni, già osservata in Tab.5.

Il modello che utilizza come ingresso la pioggia media caduta sul bacino, ha le prestazioni statisticamente peggiori, pur se non di molto, rispetto agli altri. Si consideri infatti che (vedi Tab.6) nella stima della pioggia media il pluviometro di Briolo, pur poco correlato con le portate, ha un peso di circa il 30%, grazie alla sua collocazione geografica. L'informazione di un singolo pluviometro dell'alto bacino si dimostra quindi più utile di quella "mediata".

Infine, il modello che usa come unico ingresso il valore della pioggia caduta a Valtorta, risulta avere migliori prestazioni superiori a tutti gli altri nell'ordine del 10% sui diversi indici prestazionali. Questo fatto può essere interpretato osservando (vedi Tab.4) che a Valtorta, sulla intera serie di taratura, ha piovuto molto di più che su tutte le altre stazioni dell'alto bacino (5240 decimi di mm, contro i circa 3500 delle altre due stazioni), e dunque l'informazione di questo pluviometro risulta particolarmente importante.

## Modelli con due ingressi

I modelli a due ingressi presentati utilizzano l'informazione raccolta al pluviometro di Valtorta, che come mostrato nel precedente paragrafo risulta la più "preziosa", nel caso di modello ad un solo ingresso, accoppiata a quella di Piazza Brembana o Foppolo. L'idea alla base di questa scelta è che le informazioni, relativamente poco correlate fra di loro (0.6 contro lo 0.8 di Foppolo/Pza Brembana), possano in qualche modo essere "complementari", e sia particolarmente conveniente, nel caso in cui si disponga dei dati di questi due soli pluviometri, potere disporre di un modello ad hoc, anziché utilizzare un modello ad un solo ingresso. Infatti, gli indici presentati in Tab.8 evidenziano, rispetto al miglior modello con un ingresso (quello di Valtorta), un miglioramento, sui diversi indici, circa del 10%. I ritardi scelti sono di due ore sull'ingresso di Valtorta e di tre su quelli di Piazza Brembana e Foppolo.

## Modelli con tre ingressi

Due sono i modelli con tre ingressi che hanno dato i più interessanti risultati. Il primo (**FVP**) utilizza gli ingressi di **Foppolo**, **Valtorta**, **Piazza Brembana**, cioè i più correlati con le portate ma anche i più correlati reciprocamente.

Il secondo (**FVB**) è stato invece pensato nel tentativo di sfruttare come informazione supplementare, oltre a due ingressi sulla parte alta del bacino (**Foppolo** e **Valtorta**), quello di **Briolo**, scorrelato

| Orizz<br>previs. | Correlazione V/P     |                       | Varianza non spiegata |                       | Errore medio         |                       |
|------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
|                  | Foppolo/<br>Valtorta | PzaBremb/<br>Valtorta | Foppolo/<br>Valtorta  | PzaBremb/<br>Valtorta | Foppolo/<br>Valtorta | PzaBremb/<br>Valtorta |
| <b>1h</b>        | .99                  | .99                   | .073                  | .074                  | 0.89                 | 0.91                  |
| <b>2h</b>        | .99                  | .99                   | .121                  | .128                  | 1.49                 | 1.58                  |

Tabella 8: Indici statistici prestazionali dei modelli a due ingressi Foppolo/ Valtorta e Pza Brembana/ Valtorta.

| Orizz. prev. | Correlazione V/P |      | Varianza non spiegata |      | Errore medio |      |
|--------------|------------------|------|-----------------------|------|--------------|------|
|              | FVP              | FVB  | FVP                   | FVB  | FVP          | FVB  |
| <b>1h</b>    | 0.99             | 0.99 | 0.07                  | 0.06 | 0.87         | 0.82 |
| <b>2h</b>    | 0.99             | 0.99 | 0.12                  | 0.11 | 1.52         | 1.44 |
| <b>3h</b>    | -                | 0.99 | -                     | 0.15 | -            | 1.93 |

Tabella 9: Indici statistici prestazionali dei modelli a tre ingressi Foppolo-Valtorta-Piazza Brembana e Foppolo-Valtorta-Briolo

con la altre piogge. Proprio il secondo modello realizza le prestazioni migliori. I ritardi degli ingressi sono rispettivamente 4,3,3 per **FVB**, e 2,3,2 per **FVP**. I risultati sono presentati in Tab.9. *Si noti che il modelli **FVB** permette di effettuare previsioni anche fino a tre ore in avanti.*

### Modelli con quattro ingressi

Vengono presentati due diversi modelli, che si differenziano per la configurazione dei ritardi degli ingressi. Il primo modello (*arx4334*), realizzato per ottimizzare gli indicatori prestazionali, utilizza ritardi di 4,3,3,4 passi per gli ingressi rispettivamente di Foppolo, Valtorta, Pza Brembana, Briolo. Il secondo modello (*arx4444*) è stato invece realizzato in modo da potere formulare una previsione fino a quattro passi in avanti; per questo motivo ammette, su ogni ingresso, un ritardo di quattro passi. Questa caratteristica, pur inducendo un sensibile peggiorante prestazionale (nell'ordine del 30% sulla previsione a tre passi in avanti), permette di disporre di una attendibile previsione *anche quattro ore in avanti*. Gli indici prestazionali sono raccolti in Tab.10. La Fig.6 mostra le previsioni effettuate con i due modelli sulla intera serie di taratura. L'affidabilità della previsione risulta soddisfacente. Da quanto esposto, l'impiego ottimale di questi modelli è il seguente:

- il modello *arx4334*, più preciso, per le stima i valori di portata a uno, due, tre ore in avanti;
- il modello *arx4444* per la stima il valore di portata quattro ore in avanti, non stimabile con *arx4334*.

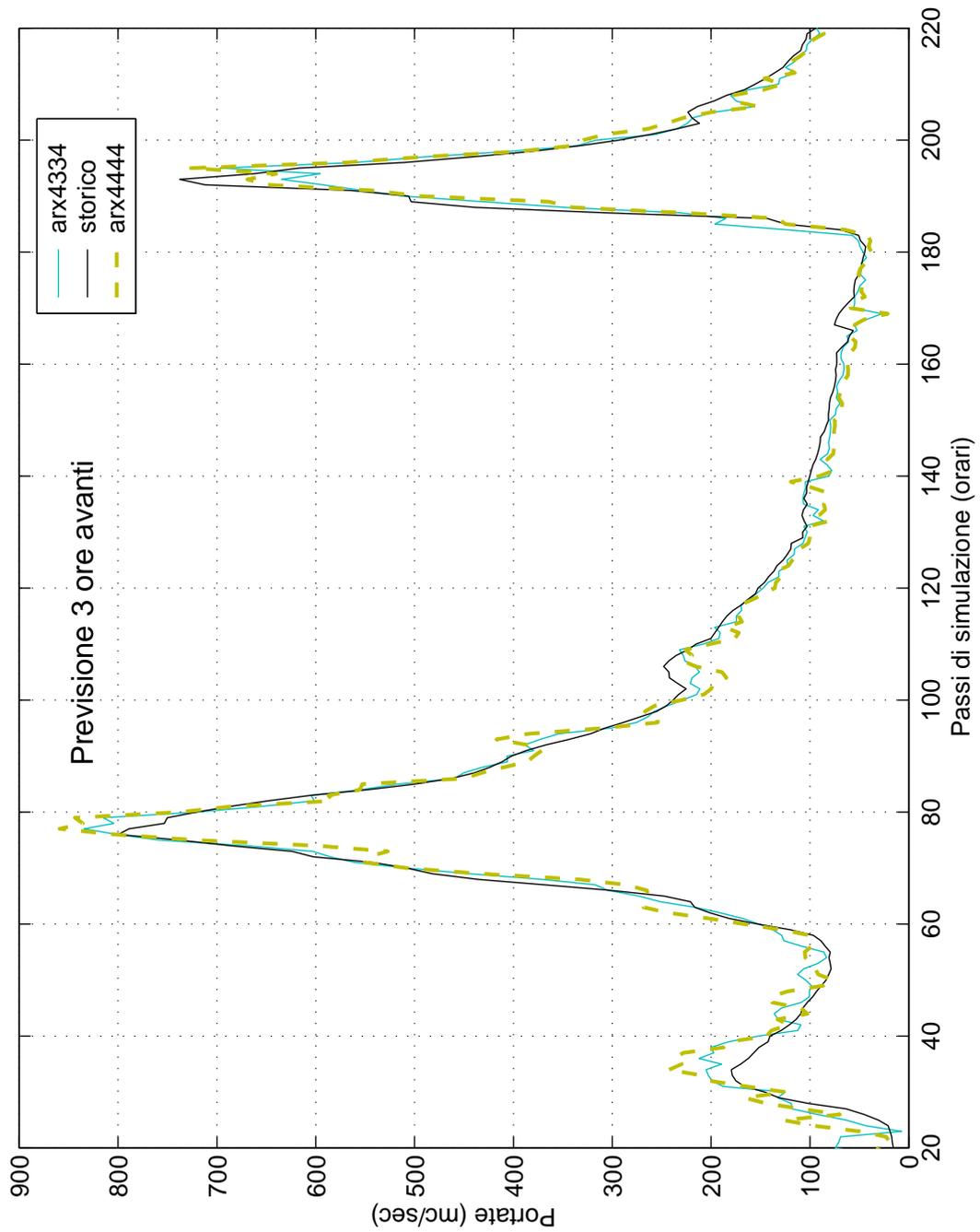


Figura 6: Previsione a 3 ore in avanti effettuata con i due modelli a 4 ingressi; il modello con ritardi (4334) risulta più preciso.

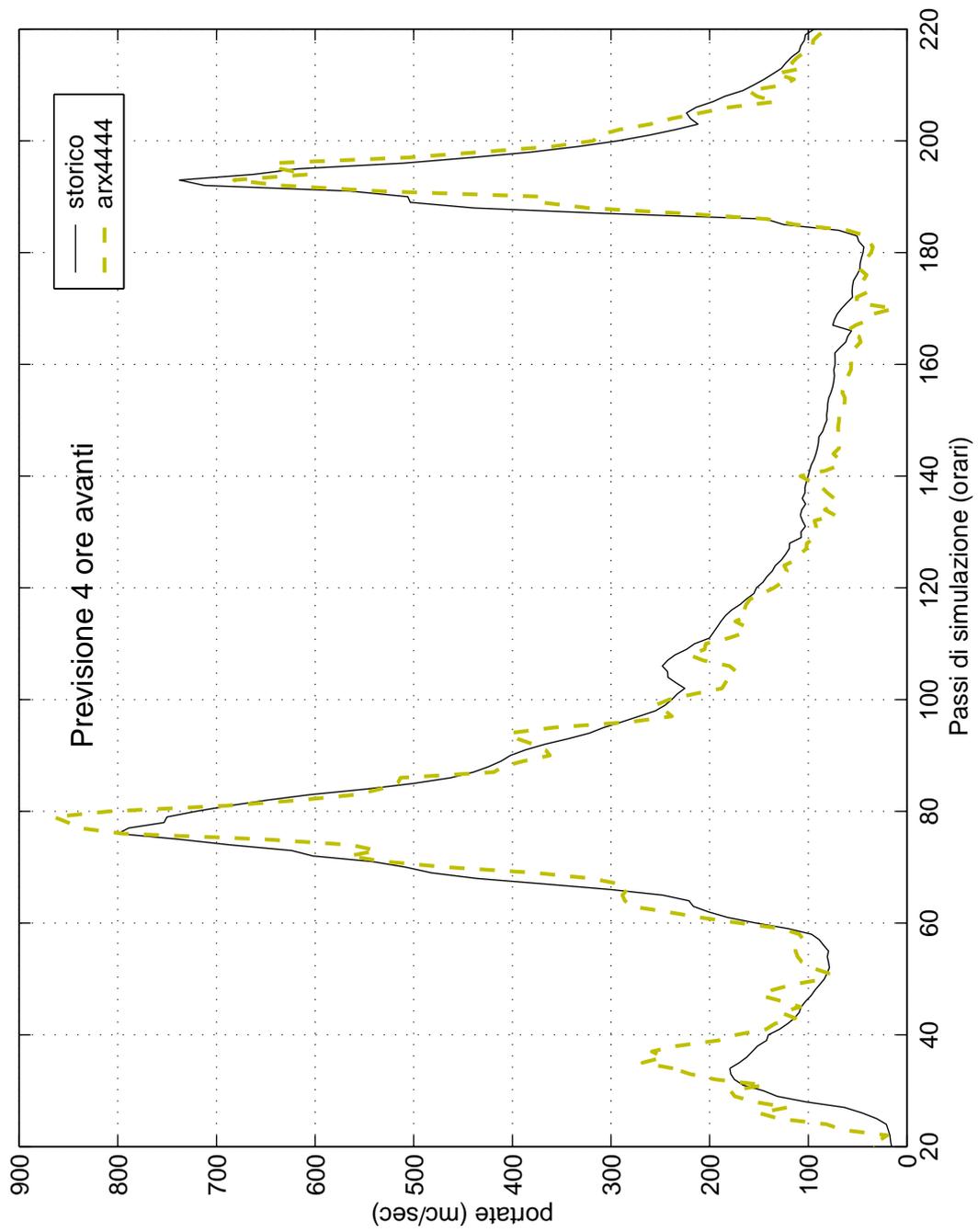


Figura 7: *Previsione a 4 ore in avanti svolta con il modello con ritardi (4444)*

| <i>Orizzonte previs.</i> | <i>Corr. vero/previsto</i> |                | <i>Var. non spiegata</i> |                | <i>Errore medio</i> |                |
|--------------------------|----------------------------|----------------|--------------------------|----------------|---------------------|----------------|
|                          | <i>arx4334</i>             | <i>arx4444</i> | <i>arx4334</i>           | <i>arx4444</i> | <i>arx4334</i>      | <i>arx4444</i> |
| <b>1h</b>                | 0.998                      | 0.998          | 0.059                    | 0.061          | 0.74                | 0.76           |
| <b>2h</b>                | 0.995                      | 0.993          | 0.103                    | 0.118          | 1.29                | 1.48           |
| <b>3h</b>                | 0.990                      | 0.985          | 0.139                    | 0.176          | 1.74                | 2.22           |
| <b>4h</b>                | –                          | 0.976          | –                        | 0.220          | –                   | 2.8            |

Tabella 10: *Indici statistici prestazionali dei modelli a quattro ingressi*

## Validazione

L'evento su cui sono stati validati i modelli è quello del 20/21 settembre 1999, durante il quale è stata registrata una portata massima di 795 mc/sec.

Siccome non sono disponibili i dati registrati durante l'evento ai pluviometri di Briolo e Valtorta, è stato possibile validare solo i modelli che hanno come unico ingresso le piogge registrate a Foppolo o a Piazza Brembana. Questo evento mette in luce l'importanza dei modelli ad un unico ingresso, che riescono a effettuare, *pur con minore precisione e con un ridotto orizzonte previsionale rispetto ai modelli con tre o quattro ingressi*, delle previsioni anche in situazioni di scarsa disponibilità di informazione.

Si potrebbe pensare che un modello a due ingressi sulle stazioni di Foppolo e Piazza Brembana permetta risultati significativamente migliori rispetto ai due modelli ad un unico ingresso validati. Come esposto nei capitoli precedenti, identificare un modello per ogni possibile combinazione di funzionamento avrebbe generato un elevato numero di modelli, molti dei quali non realmente necessari. Ad es., la elevata correlazione tra le serie pluviometriche delle due stazioni (0.82) di Foppolo e Piazza Brembana ha portato ad escludere l'identificazione in fase di taratura di un modello con questi due soli ingressi, poichè avrebbe avuto prestazioni non significativamente migliori a quelle dei modelli ad un solo ingresso. *La scelta è avvalorata dall'episodio di validazione, in cui la correlazione tra le due stazioni risulta ancora più elevata ed addirittura prossima all'unità (0.93).*

La serie di validazione consta di 96 passi orari; la Tab.11 presenta il set di dati disponibili sull'evento.

| <i>Stazione</i> | <i>Sensore</i> | <i>Unità di misura</i> | <i>%Dati validi</i> | <i>Passo</i> | <i>Fonte</i>                |
|-----------------|----------------|------------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|
| Briolo          | Idrom.         | cm                     | 100%                | 15min        | Cons. media pian. bergam.   |
| Foppolo         | Pluviom.       | Decimo di mm           | 100%                | orario       | Istituto idrografico del Po |
| Pza Bremb.      | Pluviom.       | Decimo di mm           | 100%                | orario       | Istituto idrografico del Po |

Tabella 11: *Set di dati disponibili sugli eventi di piena del settembre 1999*

Le statistiche dei dati di precipitazione oraria degli eventi di piena, sono presentate in Tab.12. Rispetto ai dati pluviometrici della serie di taratura, l'evento risulta maggiormente concentrato: *si osserva un minore numero di ore piovose, nelle quali però la precipitazione assume maggiore intensità.* In particolare, rispetto alle statistiche dell'evento di taratura di Tab.4:

- alla stazione di Foppolo:
  - la percentuale di ore piovose si riduce di due terzi;
  - la precipitazione media all’incirca si dimezza;
  - il massimo valore orario cresce di circa il 25% ;
  
- alla stazione di Piazza Brembana:
  - la percentuale di ore piovose si riduce di circa il 25%;
  - la precipitazione media rimane sostanzialmente invariata;
  - il massimo valore orario decresce da 244 a 168 decimi di mm.

| <i>Stazione</i> | <i>max</i> | <i>media</i> | <i>totale</i> | <i>% ore piovose</i> | <i>dev. st.</i> |
|-----------------|------------|--------------|---------------|----------------------|-----------------|
| Foppolo         | 132        | 8.16         | 792           | 21%                  | 23.76           |
| Pza Brembana    | 168        | 14.62        | 1418          | 30%                  | 36.24           |

Tabella 12: *Statistiche dei dati di pioggia orari relativi alla serie di validazione. I dati sono espressi in decimi di mm.*

Gli indici statistici prestazionali dei modelli sull’evento di validazione sono mostrati in Tab.13. Per quanto riguarda la previsione a due ore in avanti, che costituisce il massimo orizzonte previsionale di questi modelli, si registra un peggioramento (si vedano gli indici prestazionali in taratura degli stessi modelli, calcolati in Tab.7) della varianza spiegata del 21% per Foppolo e del 26% per Piazza Brembana; l’errore medio peggiora in entrambi i casi di circa il 55%.

| <i>Orizzonte previs.</i> | <i>Corr. vero/previsto</i> |               | <i>Var. non spiegata</i> |               | <i>Errore medio</i> |               |
|--------------------------|----------------------------|---------------|--------------------------|---------------|---------------------|---------------|
|                          | <i>Foppolo</i>             | <i>PzaBr.</i> | <i>Foppolo</i>           | <i>PzaBr.</i> | <i>Foppolo</i>      | <i>PzaBr.</i> |
| <b>1h</b>                | .99                        | .99           | .089                     | .095          | 1.39                | 1.41          |
| <b>2h</b>                | .99                        | .98           | .178                     | .189          | 3.42                | 3.53          |

Tabella 13: *Indici statistici prestazionali dei modelli ad un unico ingresso validati*

Il peggioramento prestazionale è da imputare, oltre alla fisiologica perdita di precisione della validazione rispetto alla taratura, a *errori strumentali* contenuti nella serie dei dati e a una *dinamica dell’evento piuttosto diversa* rispetto a quelli di taratura.

Per le quattro ore di picco, a causa di un errore strumentale, è stata registrata una portata identica (795.241 mc/sec), che dà luogo ad un inverosimile idrogramma di piena “spianato” sui valori di picco (Fig.8). Questo distorce sicuramente i valori degli indicatori prestazionali, in quanto proprio in corrispondenza dei massimi valori di portata si registrano i massimi errori dei modelli.

Per quanto invece riguarda la dinamica dell’evento, oltre alla maggiore intensità degli eventi meteorologici (illustrata nei precedenti paragrafi), si nota una superiore velocità di innesco della piena. Dai

dati di Tab.14 si nota che nell'evento di validazione infatti la portata passa, in 11 ore, da 35 mc/sec a 795mc/sec, (nonostante comprenda al suo interno due ore in cui la portata decresce), con un gradiente massimo orario di 226 mc/sec; negli eventi del 1996 il gradiente massimo orario è invece di 68mc/sec e di 163 mc/sec e l'innesco delle due piene risulta molto più graduale.

| Novembre 1996 |                     | Agosto 1996   |                     | Settembre 1999 |                     |
|---------------|---------------------|---------------|---------------------|----------------|---------------------|
| $Q (m^3/sec)$ | $\Delta Q_{orario}$ | $Q (m^3/sec)$ | $\Delta Q_{orario}$ | $Q (m^3/sec)$  | $\Delta Q_{orario}$ |
| 88            |                     | 50            |                     | 35             |                     |
| 96            | 8                   | 69            | 19                  | 135            | 100                 |
| 119           | 23                  | 124           | 55                  | 322            | 187                 |
| 152           | 33                  | 143           | 19                  | 548            | 226                 |
| 181           | 29                  | 306           | 163                 | 669            | 121                 |
| 201           | 20                  | 439           | 133                 | 694            | 25                  |
| 216           | 15                  | 503           | 64                  | 647            | -47                 |
| 247           | 31                  | 505           | 2                   | 622            | -25                 |
| 300           | 53                  | 564           | 62                  | 718            | 96                  |
| 368           | 68                  | 712           | 148                 | 795            | 77                  |
| 435           | 67                  | 737           | 25                  | 795            | 0                   |

Tabella 14: Velocità di innesco dei diversi eventi di piena. I dati hanno cadenza oraria. Si noti l'entità dei gradienti di portata orari nell'evento di validazione del 1999.

La Fig. 8 mostra le simulazioni compiute in validazione con entrambi i modelli. Nonostante i problemi sopra esposti, si nota una complessiva buona risposta di entrambi i modelli. La Tab.15 confronta i valori di portata osservati e previsti con il modello che ha come ingresso la piovge registrate a Foppolo.

| <i>h.</i> | <i>Q<sub>oss</sub></i> | <i>Q<sub>prev</sub></i> |
|-----------|------------------------|-------------------------|
| 9.00      | 35                     | 73                      |
| 10.00     | 135                    | 117                     |
| 11.00     | 322                    | 162                     |
| 12.00     | 548                    | 323                     |
| 13.00     | 669                    | 508                     |
| 14.00     | 694                    | 692                     |

Tabella 15: Valori osservati e previsti sull'innesco della piena con il modello che ha come ingresso le piovge registrate a Foppolo. La velocità dell'evento è tale che la portata prevista due ore avanti si realizza una sola ora avanti.

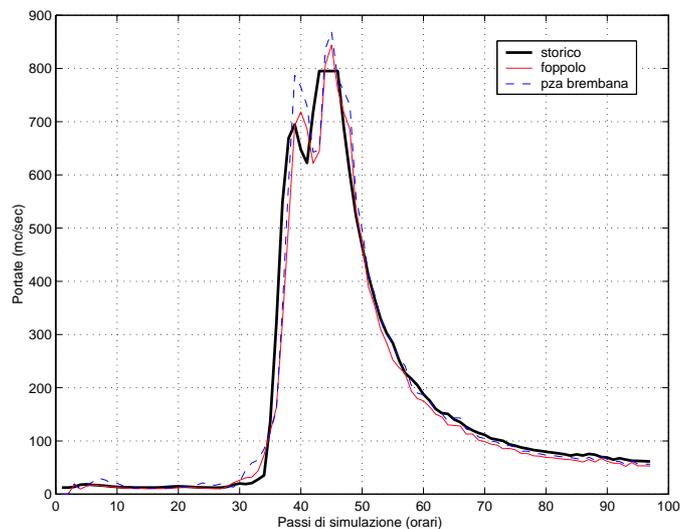


Figura 8: *Previsioni due ore avanti, con i due modelli, sull'evento di validazione. La risposta dei modelli è discreta, considerata l'estrema rapidità dell'evento.*

## Conclusioni

La serie dei dati di taratura contiene due eventi di piena importanti (tempo di ritorno stimato attorno ai 10 anni), verificatisi nell'agosto e nel novembre 1996, i cui picchi di portata si attestano sugli  $800\text{mc}/\text{sec}$ . L'utilizzo, in fase di taratura, di *due soli episodi di piena*, limita l'affidabilità dei modelli ed è opportuno, nel caso di futuri eventi, che i parametri vengano riaggiornati. Le simulazioni di taratura mostrano una *soddisfacente precisione delle previsioni formulate; in particolare, i modelli a quattro ingressi risultano attendibili anche nelle previsioni 4 ore in avanti.*

Modelli più semplici ad uno, due, tre ingressi sono stati identificati per potere disporre di una previsione anche nel caso in cui non si riesca a raccogliere l'informazione di tutti i pluviometri. Un riscontro della utilità di tali modelli è stato dato dall'evento di validazione, in cui solo due dei quattro pluviometri hanno funzionato, e sul quale è stato possibile condurre simulazioni solo con modelli ad un unico ingresso.

Nonostante la dinamica dell'evento di validazione sia notevolmente più rapida di quella degli eventi di taratura, e distorta da errori strumentali sui valori di picco, i modelli validati hanno mostrato una discreta robustezza, e il peggioramento calcolato degli indici prestazionali risulta accettabile.

# Appendice: Parametri dei modelli

Nella seguente sezione per ogni modello vengono presentati i valori dei parametri e la relativa formalizzazione matematica.

Le convenzioni adottate sono le seguenti:

- si assume come uscita del modello la stima  $\hat{y}_{t+1}$ ;
- l' $i$ -esimo coefficiente  $\alpha_i$  è riferito al termine della parte autoregressiva dell'istante  $(t+1-i)$ ;
- il coefficiente  $\beta_{jk}$  è riferito al termine del  $j$ -esimo ingresso dell'istante  $(t+1-k)$ ;
- ad ogni ingresso  $u_j$  è associato un ritardo  $\tau_j$ : questo implica che il primo coefficiente significativo dell'ingresso  $j$  sia relativo all'istante  $(t+1-\tau_j)$

## Modelli ad un ingresso

Siccome i modelli hanno una struttura identica fra di loro (uguale ordine della parte autoregressiva, uguale ordine e ritardo  $\tau = 2$  degli ingressi), risultano tutti formalizzati dalla seguente notazione:

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-1) + \alpha_3 y(t-2) + \alpha_4 y(t-3) + \beta_{12} u(t-1) + \beta_{13} u(t-2) + \beta_{14} u(t-3)$$

|                  | $\tau$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\beta_{11}$ | $\beta_{12}$ | $\beta_{13}$ | $\beta_{14}$ |
|------------------|--------|------------|------------|------------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <i>Foppolo</i>   | 2      | 1.436      | -.653      | .3002      | -.1433     | -            | .241         | .2015        | .2924        |
| <i>Valtorta</i>  | 2      | 1.443      | -.5721     | .2863      | -.1928     | -            | .1317        | .3223        | -.1559       |
| <i>Pza Bremb</i> | 2      | 1.498      | -.6819     | .2746      | -.1270     | -            | 0.0089       | 0.2657       | 0.1767       |

## Modelli a due ingressi

I due modelli hanno una struttura identica fra di loro, formalizzata dalla notazione:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} = & \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-1) + \alpha_3 y(t-2) + \alpha_4 y(t-3) + \\ & + \beta_{12} u_1(t-1) + \beta_{13} u_1(t-2) + \beta_{14} u_1(t-3) + \\ & + \beta_{23} u_2(t-2) + \beta_{24} u_2(t-3) + \beta_{25} u_2(t-4) \end{aligned}$$

### Modello con ingressi Valtorta ( $u1$ ) e Piazza Brembana ( $u2$ )

|                                  |          |              |              |              |              |              |
|----------------------------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <i>parte autoregressiva</i>      |          | $\alpha_1$   | $\alpha_2$   | $\alpha_3$   | $\alpha_4$   |              |
|                                  |          | 1.4122       | -.5868       | .3195        | -.1868       |              |
| <i>ingresso u1 (Valtorta)</i>    | $\tau_1$ | $\beta_{11}$ | $\beta_{12}$ | $\beta_{13}$ | $\beta_{14}$ | $\beta_{15}$ |
|                                  | 2        | -            | .0579        | .2902        | -.1545       | -            |
| <i>ingresso u2 (P. Brembana)</i> | $\tau_2$ | $\beta_{21}$ | $\beta_{22}$ | $\beta_{23}$ | $\beta_{24}$ | $\beta_{25}$ |
|                                  | 3        | -            | -            | .1500        | .0804        | .0243        |

### Modello con ingressi Valtorta ( $u1$ ) e Foppolo ( $u2$ )

|                               |          |              |              |              |              |              |
|-------------------------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <i>parte autoregressiva</i>   |          | $\alpha_1$   | $\alpha_2$   | $\alpha_3$   | $\alpha_4$   |              |
|                               |          | 1.371        | -.5212       | .2955        | -.1951       |              |
| <i>ingresso u1 (Valtorta)</i> | $\tau_1$ | $\beta_{11}$ | $\beta_{12}$ | $\beta_{13}$ | $\beta_{14}$ | $\beta_{15}$ |
|                               | 2        | -            | .0677        | .2961        | -.1615       |              |
| <i>ingresso u2 (Foppolo)</i>  | $\tau_2$ | $\beta_{21}$ | $\beta_{22}$ | $\beta_{23}$ | $\beta_{24}$ | $\beta_{25}$ |
|                               | 3        | -            | -            | .2276        | .1985        | .0899        |

## Modelli a tre ingressi

### Modello con ingressi Foppolo ( $u1$ ), Valtorta ( $u2$ ) e Piazza Brembana ( $u3$ )

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} = & \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-1) + \alpha_3 y(t-2) + \alpha_4 y(t-3) + \\ & + \beta_{12} u_1(t-1) + \beta_{13} u_1(t-2) + \beta_{14} u_1(t-3) + \\ & + \beta_{23} u_2(t-2) + \beta_{24} u_2(t-3) + \beta_{25} u_2(t-4) + \\ & + \beta_{32} u_3(t-1) + \beta_{33} u_3(t-2) + \beta_{34} u_3(t-3) \end{aligned}$$

| <i>parte autoregressiva</i> |          | $\alpha_1$   | $\alpha_2$   | $\alpha_3$   | $\alpha_4$   |              |
|-----------------------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                             |          | 1.4145       | -.6264       | .3601        | 2032         |              |
| <i>ingresso u1</i>          | $\tau_1$ | $\beta_{11}$ | $\beta_{12}$ | $\beta_{13}$ | $\beta_{14}$ | $\beta_{15}$ |
|                             | 2        | -            | .3282        | .0417        | .2038        |              |
| <i>ingresso u2</i>          | $\tau_2$ | $\beta_{21}$ | $\beta_{22}$ | $\beta_{23}$ | $\beta_{24}$ | $\beta_{25}$ |
|                             | 3        | -            | -            | .2852        | -.1552       | -.0251       |
| <i>ingresso u3</i>          | $\tau_3$ | $\beta_{31}$ | $\beta_{32}$ | $\beta_{33}$ | $\beta_{34}$ | $\beta_{35}$ |
|                             | 2        | -            | -.1717       | .0968        | .0316        |              |

### Modello con ingressi Foppolo ( $u1$ ), Valtorta ( $u2$ ) e Briolo ( $u3$ )

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} = & \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-1) + \alpha_3 y(t-2) + \alpha_4 y(t-3) + \\ & + \beta_{14} u_1(t-3) + \beta_{15} u_1(t-4) + \beta_{16} u_1(t-5) + \\ & + \beta_{23} u_2(t-2) + \beta_{24} u_2(t-3) + \beta_{25} u_2(t-4) + \\ & + \beta_{33} u_3(t-2) + \beta_{34} u_3(t-3) + \beta_{35} u_3(t-4) \end{aligned}$$

| <i>parte autoregressiva</i> |          | $\alpha_1$   | $\alpha_2$   | $\alpha_3$   | $\alpha_4$   |              |              |
|-----------------------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                             |          | 1.4317       | .4590        | -.1781       | .1768        |              |              |
| <i>ingresso u1</i>          | $\tau_1$ | $\beta_{11}$ | $\beta_{12}$ | $\beta_{13}$ | $\beta_{14}$ | $\beta_{15}$ | $\beta_{16}$ |
|                             | 4        | -            | -            | -            | .5059        | .0187        | -.3535       |
| <i>ingresso u2</i>          | $\tau_2$ | $\beta_{21}$ | $\beta_{22}$ | $\beta_{23}$ | $\beta_{24}$ | $\beta_{25}$ | $\beta_{26}$ |
|                             | 3        | -            | -            | .2836        | -.1485       | .0265        | -            |
| <i>ingresso u3</i>          | $\tau_3$ | $\beta_{31}$ | $\beta_{32}$ | $\beta_{33}$ | $\beta_{34}$ | $\beta_{35}$ | $\beta_{36}$ |
|                             | 3        | -            | -            | -0.4290      | -1.9575      | 0.5491       | -            |

## Modelli a quattro ingressi: Foppolo ( $u1$ ), Valtorta ( $u2$ ), Piazza Brembana ( $u3$ ) e Briolo ( $u4$ )

### Modello per previsione a 1,2,3 ore avanti

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} = & \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-1) + \alpha_3 y(t-2) + \alpha_4 y(t-3) + \\ & + \beta_{14} u_1(t-3) + \beta_{15} u_1(t-4) + \beta_{16} u_1(t-5) + \\ & + \beta_{23} u_2(t-2) + \beta_{24} u_2(t-3) + \beta_{25} u_2(t-4) + \\ & + \beta_{33} u_3(t-2) + \beta_{34} u_3(t-3) + \beta_{35} u_3(t-4) + \\ & + \beta_{44} u_4(t-3) + \beta_{45} u_4(t-4) + \beta_{46} u_4(t-5) \end{aligned}$$

|                             |          |              |              |              |              |              |              |
|-----------------------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <i>parte autoregressiva</i> |          | $\alpha_1$   | $\alpha_2$   | $\alpha_3$   | $\alpha_4$   |              |              |
|                             |          | 1.4632       | -.5876       | .2859        | -.1862       |              |              |
| <i>ingresso u1</i>          | $\tau_1$ | $\beta_{11}$ | $\beta_{12}$ | $\beta_{13}$ | $\beta_{14}$ | $\beta_{15}$ | $\beta_{16}$ |
|                             | 4        | -            | -            | -            | .2499        | .0490        | -.2386       |
| <i>ingresso u2</i>          | $\tau_2$ | $\beta_{21}$ | $\beta_{22}$ | $\beta_{23}$ | $\beta_{24}$ | $\beta_{25}$ | $\beta_{26}$ |
|                             | 3        | -            | -            | .2758        | -0.1599      | 0.0347       | -            |
| <i>ingresso u3</i>          | $\tau_3$ | $\beta_{31}$ | $\beta_{32}$ | $\beta_{33}$ | $\beta_{34}$ | $\beta_{35}$ | $\beta_{36}$ |
|                             | 3        | -            | -            | .0840        | .1604        | -.0613       | -            |
| <i>ingresso u4</i>          | $\tau_4$ | $\beta_{41}$ | $\beta_{42}$ | $\beta_{43}$ | $\beta_{44}$ | $\beta_{45}$ | $\beta_{46}$ |
|                             | 4        | -            | -            | -            | -.1943       | 0.0707       | -.1283       |

### Modello per previsione a 4 ore avanti

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} = & \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t-1) + \alpha_3 y(t-2) + \alpha_4 y(t-3) + \\ & + \beta_{14} u_1(t-3) + \beta_{15} u_1(t-4) + \beta_{16} u_1(t-5) + \\ & + \beta_{24} u_2(t-3) + \beta_{25} u_2(t-4) + \beta_{26} u_2(t-5) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta_{34}u_3(t-3) + \beta_{35}u_3(t-4) + \beta_{36}u_3(t-5) + \\
& +\beta_{44}u_4(t-3) + \beta_{45}u_4(t-4) + \beta_{46}u_4(t-5)
\end{aligned}$$

| <i>parte autoregressiva</i> |          | $\alpha_1$   | $\alpha_2$   | $\alpha_3$   | $\alpha_4$   |              |              |
|-----------------------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                             |          | 1.5381       | -.4734       | -.3108       | .2093        |              |              |
| <i>ingresso u1</i>          | $\tau_1$ | $\beta_{11}$ | $\beta_{12}$ | $\beta_{13}$ | $\beta_{14}$ | $\beta_{15}$ | $\beta_{16}$ |
|                             | 4        | -            | -            | -            | .2377        | -.0621       | -.2007       |
| <i>ingresso u2</i>          | $\tau_2$ | $\beta_{21}$ | $\beta_{22}$ | $\beta_{23}$ | $\beta_{24}$ | $\beta_{25}$ | $\beta_{26}$ |
|                             | 4        | -            | -            | -            | -.0986       | -.0172       | .2773        |
| <i>ingresso u3</i>          | $\tau_3$ | $\beta_{31}$ | $\beta_{32}$ | $\beta_{33}$ | $\beta_{34}$ | $\beta_{35}$ | $\beta_{36}$ |
|                             | 4        | -            | -            | -            | .3078        | .0325        | .0194        |
| <i>ingresso u4</i>          | $\tau_4$ | $\beta_{41}$ | $\beta_{42}$ | $\beta_{43}$ | $\beta_{44}$ | $\beta_{45}$ | $\beta_{46}$ |
|                             | 4        | -            | -            | -            | -.2480       | .1424        | -.0965       |

## Tavola 1 : suddivisione in topoieti del bacino imbrifero

Area totale : 765 kmq

Aree dei singoli topoieti:

|              |         |          |         |
|--------------|---------|----------|---------|
| Foppolo      | 126 kmq | Valtorta | 113 kmq |
| Pza Brembana | 309 kmq | Briolo   | 215 kmq |

