

Simulazione

I conigli di Fibonacci

Data

1. Formulazione del modello

Nel 1223 il matematico pisano Leonardo Fibonacci formulò la soluzione del seguente problema:

«Quante coppie di conigli si ottengono in un anno –salvo i casi di morte– supponendo che ogni coppia dia alla luce un'altra coppia ogni mese e che le coppie più giovani siano in grado di riprodursi già al secondo mese di vita?»

Il problema può essere tradotto nelle seguenti equazioni di stato:

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t)$$

dove x_1 è il numero di coppie giovani (non riproduttive) e x_2 il numero di coppie riproduttive. Il modello può quindi essere scritto in forma matriciale come

$$x(t+1) = Ax(t), \text{ con } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La trasformazione di uscita del sistema fornisce il numero totale di coppie di conigli ottenute alla fine del mese t :

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

1.1 Simulazione del movimento del sistema

Definite la matrice A del sistema inserendone i coefficienti nelle celle B3:C4. Associate ora il nome alla matrice selezionando le quattro celle che contengono i coefficienti (*digitate «A» nella Casella Nome in alto, a sinistra della Barra della formula, e premete INVIO*). È ora possibile utilizzare il nome come riferimento alla matrice nelle formule, senza dover ricordare il corrispondente intervallo di celle. Per chiarezza, bordate di nero le celle contenenti la matrice (*selezionate le celle, utilizzate il comando Formato Celle... tasto destro del mouse, selezionate quindi la voce Bordo e l'opzione Bordato*).

Inserite nella riga 6 l'indice di scansione temporale (in questo caso, il numero di mesi trascorsi a partire dal tempo iniziale 0). Intestate la riga digitando «t» nella cella A6, inserite 0 e 1 rispettivamente nelle celle B6 e C6, poi selezionate entrambe le celle e trascinate il quadratino in basso a destra della selezione per continuare l'elenco (arrivate fino a 12, quindi fino alla cella N6).

Intestate le righe 7 e 8 rispettivamente «x1» e «x2». Definite lo stato iniziale del sistema: ipotizzando che inizialmente sia presente solo una coppia di conigli giovani ($x_1(0) = 1$,

$x_2(0) = 0$), digitate rispettivamente 1 nella cella B7 e 0 nella cella B8. Intestate poi la riga 9 come «y» e calcolate l'uscita del sistema al tempo 0 come somma delle variabili di stato al medesimo istante di tempo.

Ricavate ora il movimento del sistema per $t > 0$: selezionate le celle C7 e C8 e calcolate il vettore di stato al tempo 1 come prodotto della matrice A e del vettore $[x_1 \ x_2]^T$ (usate la funzione *MATR.PRODOTTO()*, ricordando di premere *CTRL+MAIUSC+INVIO*). Copiate ora il contenuto di C7 e C8 e incollatelo nelle colonne adiacenti per ricavare il vettore di stato nei mesi successivi. Quali sono i valori del vettore di stato al tempo $t = 6$? E al tempo $t = 12$?

$$x(6) = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \qquad x(12) = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

Calcolate ora l'uscita del sistema copiando e incollando la formula utilizzata per calcolare $y(0)$. Quanto vale l'uscita del sistema al tempo $t = 6$? E al tempo $t = 12$?

$y(6) = \dots\dots\dots$ $y(12) = \dots\dots\dots$

1.2 Rappresentazione grafica del movimento

Rappresentate ora graficamente il movimento dell'uscita (cioè y in funzione di t) per mezzo di un diagramma a dispersione con le seguenti caratteristiche:

- Tipo di grafico: dispersione (XY) con dati uniti fra loro da una linea, senza indicatori
- Nome della serie: conigli
- Titolo del grafico: Dinamica della popolazione di conigli
- Asse dei valori (X): t (mesi)
- Asse dei valori (Y): y (coppie)

Osservate il grafico. Il movimento del sistema segue

- una retta a pendenza positiva
- una retta a pendenza negativa
- una curva a concavità verso l'alto
- una curva a concavità verso il basso

Impostate ora una scala logaritmica per l'asse delle ordinate (*fate doppio clic sull'asse, selezionate la voce *Scala* e selezionate l'opzione *Scala logaritmica**). Osservate nuovamente il grafico. Trascurando i primi 3 passi di simulazione, i dati si allineano ora lungo

- una retta
- una curva

Che tipo di curva segue dunque il movimento del sistema in scala naturale?.....

Qual è la risposta al problema di Fibonacci?

Simulazione

Il modello a ragnatela

1. Formulazione del modello

Si vuole simulare la dinamica dei prezzi di un prodotto conoscendo le sue curve di domanda e offerta sul mercato.

La domanda d (*demand*) esercitata dai consumatori nell'anno t è una funzione lineare decrescente del prezzo x nell'anno corrente:

$$d(t) = D - \alpha x(t) \tag{1}$$

L'offerta s (*supply*) proposta dai produttori nell'anno t è una funzione lineare crescente del prezzo di equilibrio del prodotto nell'anno precedente, $x(t-1)$, sulla base del quale viene pianificata la produzione:

$$s(t) = S + \beta x(t-1) \tag{2}$$

Ipotizzando che ogni anno domanda e offerta si bilancino tra loro, si può scrivere

$$d(t) = s(t) \rightarrow D - \alpha x(t) = S + \beta x(t-1) \tag{3}$$

da cui si ricava la seguente equazione di stato:

$$x(t) = (D - S)/\alpha - x(t-1) \cdot \beta/\alpha \tag{4}$$

1.1 Impostazione del foglio di lavoro

Inserite nella parte superiore del foglio di lavoro i valori dei parametri D , α , S e β e il valore iniziale del prezzo, x_0 , come indicato nella figura sottostante. (*due suggerimenti per la formattazione*: per inserire le lettere greche α e β , digitate «a» e «b» nelle celle e indicate Symbol come Tipo di Carattere; per inserire il pedice evidenziate solo il testo da mettere a pedice, selezionate la voce Formato Cella dal menu tasto destro del mouse e spuntate la voce Pedice tra gli Effetti)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		D	α	S	β		x_0				
3		8	0,2	1	0,1		10				
4											

Definite inoltre i seguenti nomi per le celle che contengono i valori dei parametri appena inseriti (utilizzando la casella in alto a sinistra come per le matrici dell'esercizio precedente):

Parametro	D	α	S	β	x_0
Cella	B3	C3	D3	E3	G3
Nome	D	alfa	S	beta	x_0

1.2 Rappresentazione grafica delle curve di domanda e di offerta

Trascurate momentaneamente la dinamica temporale del sistema e concentratevi sulle relazioni che legano la domanda d , l'offerta s e il prezzo di mercato x del prodotto. Calcolate i livelli di domanda e di offerta corrispondenti a differenti livelli di prezzo e disegnate le curve di domanda e di offerta. Per fare questo, inserite nella colonna B (v. figura sottostante) un elenco di valori compresi tra 0 e 50 con passo 10, che rappresentano i diversi livelli di prezzo. Nella colonna C calcolate la corrispondente domanda dei consumatori come $d = D - \alpha x$ (Eq. 1, in cui i valori del prezzo x sono quelli contenuti nella colonna B). Nella colonna D calcolate, in modo analogo, l'offerta dei produttori come $s = S + \beta x$ (Eq. 2, in cui i valori di x sono ancora quelli della colonna B).

	A	B	C	D	E
4					
5		x	d	s	
6		0			
7		10			
8		20			
9		...			

Rappresentate graficamente le curve di domanda e di offerta appena calcolate, per mezzo di un diagramma con le seguenti caratteristiche:

- Tipo di grafico: dispersione (XY) con dati uniti fra loro da una linea, senza indicatori
- Titolo del grafico: Modello a ragnatela
- Nome della serie 1: domanda
- Colore della serie 1: verde
- Nome della serie 2: offerta
- Colore della serie 2: blu
- Asse dei valori (X): prezzo
- Scala asse dei valori (X): Valore minimo 0, Valore massimo 50, Unità principale 10
- Asse dei valori (Y): unità di prodotto
- Scala asse dei valori (Y): Valore minimo 0, Valore massimo 10, Unità principale 2

1.3 Simulazione del movimento del sistema

Nella colonna F inserite i valori dell'istante di tempo t : iniziate da 0 e arrivate fino a 30 (v. figura sottostante). Nella colonna adiacente calcolate il corrispondente valore dello stato x : nella cella G6 fate riferimento alla condizione iniziale inserita nella cella G3; nelle celle sottostanti, applicate la formula ricorsiva data dall'equazione (4).

	E	F	G	H
4				
5		t	x	
6		0		
7		1		
8		...		

Rappresentate graficamente il movimento del sistema in funzione del tempo per mezzo di un diagramma con le seguenti caratteristiche:

- Tipo di grafico: dispersione (XY) con dati uniti fra loro da una linea, senza indicatori
- Titolo del grafico: Andamento del prezzo
- Nome della serie: prezzo
- Colore della serie: rosso
- Asse dei valori (X): tempo
- Scala asse dei valori (X): Valore minimo 0, Valore massimo 30, Unità principale 10
- Asse dei valori (Y): prezzo
- Scala asse dei valori (Y): Valore minimo 0, Valore massimo 50, Unità principale 10

Osservate il grafico. Come varia il prezzo nel tempo? Il prezzo tende a un valore di equilibrio? Se sì, quale?

1.4 La "ragnatela"

Nelle colonne I e J predisponete le formule per disegnare la "ragnatela" (v. figura sottostante).

	H	I	J	K
4				
5		x	s, d	
6				

Inserite le seguenti formule nelle celle sottostanti:

Cella	Formola	Note
I6	=x_0	prezzo x_0 all'istante iniziale ($t = 0$)
J6	=S+beta*I6	offerta al passo successivo ($t = 1$)
I7	=-beta/alfa*I6+(D-S)/alfa	prezzo di equilibrio al tempo $t = 1$
J7	=D-alfa*I7	domanda al tempo $t = 1$
I8	=I7	prezzo di equilibrio al tempo $t = 1$
J8	=S+beta*I8	offerta al passo successivo ($t = 2$)

Selezionate ora l'intervallo di quattro celle I7:J8 (escludendo quindi la riga 6!) e copiatelo, trascinandolo per il quadratino in basso a destra della selezione, fino alla riga 37. Selezionate poi l'intervallo I5:J37 e copiatelo (CTRL+C); selezionate il grafico che contiene le curve di domanda e offerta; selezionate infine la voce Incolla speciale... del menu Incolla (utilizzate la frecciolina sottostante per aprire il menu). Nella finestra di dialogo che si apre, selezionate le opzioni Aggiungi celle come nuova serie, Valori (Y) in colonne, Nomi delle serie nella prima riga e Categorie (valori X) nella prima colonna. Formattate la nuova serie di dati (con un doppio clic sulla linea corrispondente) come linea continua, senza indicatori, di colore rosso.

Osservate il grafico. La linea rossa rappresenta la dinamica del prezzo nel tempo sotto forma di diagramma "a ragnatela". La simulazione inizia a partire da un valore dato del prezzo all'anno 0 (nel caso in esame, 10 unità di prezzo). Tale livello di prezzo, utilizzato come stima del prezzo corrente dai produttori, determina il valore che l'offerta assume l'anno successivo (primo punto sulla linea blu dell'offerta). Se la domanda bilancia l'offerta, il nuovo prezzo a cui si assesterà il mercato nell'anno in corso si ottiene spostandosi orizzontalmente dal punto di partenza verso la curva verde dell'offerta. Il prezzo influenzerà la produzione dell'anno successivo, che si ottiene spostandosi verticalmente verso la curva blu. Questa costruzione grafica consente di rappresentare congiuntamente la dinamica delle tre variabili economiche (prezzo, domanda e offerta) in modo intuitivo.

Il diagramma a ragnatela conferma il valore di convergenza del prezzo sul lungo periodo?

1.5 Analisi qualitativa di stabilità

Provate ora a modificare il valore del parametro β della curva di offerta. Aumentate progressivamente il suo valore, con passo 0.01 dal valore iniziale 0.1 fino a 0.19. Osservate come varia di conseguenza il movimento del sistema. Come cambia il tempo necessario per avvicinarsi all'equilibrio stabile?

Impostate ora il valore di β a 0.21. Cosa succede? Il sistema converge ancora verso un equilibrio stabile? Perché?

Simulazione

Il modello di Leslie

1. Formulazione del modello

Si vuole simulare la dinamica demografica della popolazione della città di Milano. Sono noti i dati di sopravvivenza e fertilità per il Nord Italia, riportati nella tabella sottostante, dove x è la classe d'età (di ampiezza pari a 5 anni; tra parentesi il corrispondente intervallo di età), σ_x è la sopravvivenza dalla classe x alla classe $x + 1$ e f_x la fertilità della classe x . È inoltre riportata la distribuzione $n_x(2001)$ della popolazione milanese nelle diverse classi per il 2001.

x	σ_x	f_x	$n_x(2001)$
1 (0-4)	0,9983	0	48697
2 (5-9)	0,9984	0,00003	44006
3 (10-14)	0,9960	0,00692	42144
4 (15-19)	0,9956	0,21660	43990
5 (20-24)	0,9958	0,24510	59066
6 (25-29)	0,9951	0,14840	93173
7 (30-34)	0,9927	0,06110	107347
8 (35-39)	0,9879	0,01670	103895
9 (40-44)	0,9793	0,00120	86564
10 (45-49)	0,9666	0,00005	77022
11 (50-54)	0,9476	0	84572
12 (55-59)	0,9261	0	85858
13 (60-64)	0,8866	0	93675
14 (65-69)	0,8204	0	82718
15 (70-74)	0,7274	0	74491
16 (75-79)	0,5838	0	59636
17 (80-84)	0,3783	0	33850
18 (85-90)	0,1200	0	35507

Il problema può essere formalizzato mediante un modello di Leslie con passo quinquennale:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1(t+5) = \sum_x \sigma_0 f_x n_x(t) \\ n_2(t+5) = \sigma_1 n_1(t) \\ n_3(t+5) = \sigma_2 n_2(t) \\ \vdots \\ n_{17}(t+5) = \sigma_{16} n_{16}(t) \\ n_{18}(t+5) = \sigma_{17} n_{17}(t) + \sigma_{18} n_{18}(t) \end{array} \right.$$

dove n_x è il numero di individui nella classe di età x al tempo t ($x = 1 \dots 18$), σ_x la sopravvivenza dalla classe di età x alla successiva (con σ_0 , sopravvivenza alla nascita, pari a 0,9869) e f_x la fertilità della classe di età x . Il sistema precedente può essere scritto in forma matriciale come

$$n(t+5) = A n(t)$$

con

$$n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_{18} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} \sigma_0 f_1 & \sigma_0 f_2 & \cdots & \sigma_0 f_{17} & \sigma_0 f_{18} \\ \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{17} & \sigma_{18} \end{bmatrix}$$

In cui la prima riga contiene i prodotti $\sigma_0 f_x$, la sottodiagonale contiene le sopravvivenze σ_x delle classi dalla 1 alla 17 e l'ultimo elemento della diagonale la sopravvivenza dell'ultima classe di età.

Nel caso in cui l'immigrazione netta (differenza tra immigrazione ed emigrazione) non sia trascurabile, il sistema diventa

$$n(t+5) = An(t) + bu(t)$$

dove

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{18} \end{bmatrix}$$

rappresenta la frazione di immigrati nelle diverse classi di età.

1.1 Simulazione della dinamica demografica in assenza di immigrazione

Scaricate il file che contiene i dati del problema al link: <https://guariso.faculty.polimi.it>

Ipotizzate per ora che l'immigrazione netta sia trascurabile. Definite la matrice A (matrice di Leslie) inserendone i coefficienti nell'intervallo di celle F6:W23 (poiché le variabili di stato sono 18, la matrice deve avere dimensioni 18x18). Identificate l'intervallo di celle con il nome «A» (selezionatelo e digitate «A» nella Casella Nome). Digitate una «A» anche nella cella F5 per ricordarvi cosa contengono le celle sottostanti.

La costruzione della matrice di Leslie non presenta particolari difficoltà ma risulta piuttosto laboriosa poiché, siccome le variabili di stato sono 18, la matrice ha dimensioni 18x18 ed è quindi necessario inserire 324 coefficienti. Per costruirla in modo più rapido ed evitare errori potete procedere come segue: **(1)** ponete inizialmente a 0 tutti i coefficienti della matrice; **(2)** selezionate l'intervallo di celle D7:D24 (fertilità), copiatelo (comando Copia del menu Modifica) e incollatelo, trasponendolo, nell'intervallo di celle F3:W3 (usate il comando Incolla speciale... *CTRL+MAIUSC+V*, selezionando le opzioni Incolla valori e Trasponi); **(3)** nella cella F6 digitate la formula $\$C\$6 * F3$ per calcolare il prodotto $\sigma_0 f_1$; **(4)** copiate la cella F6 nelle celle da G6 a W6 per completare la prima riga della matrice; **(5)** nella cella F7, inserite la formula $=\$C7$; **(6)** copiate e incollate la cella F7 lungo la sottodiagonale fino alla cella V23; **(7)** la sopravvivenza dell'ultima classe di età (cella C24) va invece copiata nella cella W23, cioè nell'ultimo elemento della diagonale.

Inserite ora nella riga 27 l'indice di scansione temporale (in questo caso l'anno): identificate la riga digitando «t» nella cella B27, inserite 2001 e 2006 rispettivamente nelle celle C27 e D27, poi selezionate entrambe le celle e trascinate il quadratino in basso a destra della selezione per continuare l'elenco (arrivate fino al 2201, quindi fino alla cella AQ27).

Identificate le righe sottostanti (da 28 a 45) inserendo «n1», «n2», ... «n18» nelle celle da B28 a B45 (digitate «n1» nella cella B28 e poi trascinate il quadratino in basso a destra della selezione verso il basso per continuare l'elenco). Nella cella B46 digitate invece «Ntot». Nell'intervallo C28:C45 inserite le abbondanze delle diverse classi d'età nel 2001 (riportate nella prima pagina di questo fascicolo). Nella cella C46 calcolate poi la popolazione totale come somma dell'intervallo C28:C45.

Effettuate una proiezione della dinamica demografica della popolazione milanese nei prossimi 200 anni: selezionate l'intervallo D28:D45 e calcolate la distribuzione nelle diverse classi d'età nel 2006 come prodotto della matrice A e del vettore delle abbondanze nel 2001. Copiate ora la formula nelle colonne adiacenti per completare la simulazione. Copiate anche la formula per il calcolo della popolazione totale. Selezionate infine per le celle da C28 a AQ46 il formato Numero con 0 posizioni decimali.

Qual era la consistenza della popolazione milanese nel 2001? E quanti abitanti avrebbe Milano nel 2026 se sopravvivenza e fertilità rimanessero costanti? E nel 2051?

$N_{tot}(2001) = \dots\dots\dots N_{tot}(2026) = \dots\dots\dots N_{tot}(2051) = \dots\dots\dots$

Quanti individui avevano età compresa tra 30 e 34 anni nel 2001? Quanti saranno nel 2026? E nel 2051?

$n_7(2001) = \dots\dots\dots n_7(2026) = \dots\dots\dots n_7(2051) = \dots\dots\dots$

Quanti individui avevano età compresa tra 50 e 54 anni nel 2001? Quanti saranno nel 2026? E nel 2051?

$n_{11}(2001) = \dots\dots\dots n_{11}(2026) = \dots\dots\dots n_{11}(2051) = \dots\dots\dots$

Commentate il risultato.

1.2 Rappresentazione grafica della dinamica demografica

Rappresentate ora graficamente il movimento del sistema (cioè n_x in funzione di t) per mezzo di un diagramma a dispersione con le seguenti caratteristiche:

- Tipo di grafico: dispersione (XY) con dati uniti fra loro da una linea, senza indicatori
- Titolo del grafico: Dinamica della popolazione milanese
- Asse dei valori (X): t (anno)
- Asse dei valori (Y): n (individui)

Osservate il grafico. Come sono fatte le curve che descrivono l'andamento del tempo delle diverse classi di età?

Impostate ora una scala logaritmica per l'asse delle ordinate e osservate nuovamente il grafico. Commentate la forma delle curve in scala logaritmica.

Create ora un altro grafico e rappresentate il numero totale di individui nel tempo (cioè N_{tot} in funzione di t).

Osservate il grafico. Che forma ha la curva in scala naturale?

E in scala logaritmica?

1.3 Calcolo della distribuzione percentuale per classi d'età

Analizzate ora la struttura d'età della popolazione, ovvero la percentuale di individui nelle diverse classi d'età. Identificate le righe da 48 a 65 inserendo «p1», «p2», ... «p18» nelle celle da B48 a B65. Nell'intervallo C48:C65 calcolate le abbondanze percentuali delle diverse classi d'età nel 2001 dividendo i valori di abbondanza assoluta (n_x) per il numero totale di individui (N_{tot}). Copiate ora le formule nelle colonne adiacenti (fino alla colonna AQ) per completare i calcoli. Selezionate per le celle da C48 a AQ65 il formato Percentuale con 1 posizione decimale.

Qual era l'importanza percentuale della classe di età tra 30 e 34 anni nel 2001? E quale sarà nel 2026? E nel 2051?

$p_7(2001) = \dots\dots\dots p_7(2026) = \dots\dots\dots p_7(2051) = \dots\dots\dots$

Qual era la frazione di individui di età compresa tra 50 e 54 anni nel 2001? E quale sarà nel 2026? E nel 2051?

$p_{11}(2001) = \dots\dots\dots p_{11}(2026) = \dots\dots\dots p_{11}(2051) = \dots\dots\dots$

Commentate il risultato.
.....
.....
.....
.....

1.4 Rappresentazione grafica della dinamica in termini di distribuzione percentuale

Rappresentate ora graficamente la dinamica del sistema in termini di distribuzione percentuale (cioè p_x in funzione di t), in modo analogo a quanto fatto al punto 1.2, mediante un diagramma a dispersione in scala naturale con linee senza indicatori.

Osservate il grafico. Come sono fatte le curve che descrivono l'andamento nel tempo della distribuzione percentuale nelle diverse classi di età?
.....
.....
.....

1.5 Simulazione della dinamica demografica in presenza di immigrazione

Ipotizzate ora che l'immigrazione abbia un effetto non trascurabile sulla dinamica demografica di Milano. Selezionate la cella Y6 e identificatela con il nome «u» (digitate «u» nella Casella Nome). Digitate una «u» anche nella cella Y5 per ricordarvi che la cella sottostante conterrà l'ingresso (supposto costante nel tempo) del sistema. Inserite uno 0 nella cella Y6.

Selezionate ora l'intervallo di celle AA6:AA23 e identificatelo con il nome «b». Digitate una «b» anche nella cella AA5 per ricordarvi che le celle sottostanti conterranno i coefficienti del vettore che rappresenta la frazione di immigrati nelle diverse classi di età. Selezionate per le celle da AA6 a AA23 il formato Numero con 3 posizioni decimali. Ponete a 0 tutti i coefficienti tranne i seguenti 5: $b_4 = 0,125$, $b_5 = 0,250$, $b_6 = 0,250$, $b_7 = 0,250$, $b_8 = 0,125$.

Fate ora una copia del contenuto delle celle B27:AQ46 nell'intervallo B67:AQ86. Nelle celle copiate, modificate le formule per il calcolo del movimento del sistema in modo da includere l'effetto dell'immigrazione. Ricordate la formula

$$n(t+5) = A n(t) + b u(t)$$

dove, in questo caso, $u(t) = \bar{u}$ costante.

Verificate che se $\bar{u} = 0$ la dinamica del sistema non cambia (se cambia, significa che avete sbagliato qualcosa). Modificate ora il valore di \bar{u} (1000, 10000, 50000) e osservate le conseguenze.

Quale sarebbe la consistenza della popolazione milanese nel 2001, nel 2026 e nel 2051 ipotizzando un'immigrazione costante e pari a 1000 persone ogni anno?

$N_{\text{tot}}(2001) = \dots\dots\dots N_{\text{tot}}(2026) = \dots\dots\dots N_{\text{tot}}(2051) = \dots\dots\dots$

E ipotizzando un'immigrazione pari a 10000 persone?

$N_{\text{tot}}(2001) = \dots\dots\dots N_{\text{tot}}(2026) = \dots\dots\dots N_{\text{tot}}(2051) = \dots\dots\dots$

E ipotizzando un'immigrazione pari a 50000 persone?

$N_{\text{tot}}(2001) = \dots\dots\dots N_{\text{tot}}(2026) = \dots\dots\dots N_{\text{tot}}(2051) = \dots\dots\dots$

Commentate il risultato.
.....
.....
.....
.....

Confrontate ora su un grafico in scala logaritmica la dinamica della popolazione in assenza di immigrazione e quella ottenuta nell'ipotesi di immigrazione pari a 50000 individui/anno.

Le curve hanno la stessa forma?.....
.....
.....

Pensate che il punto di equilibrio del sistema sia cambiato? Perché?
.....
.....
.....

In questo caso, sapreste valutare, almeno approssimativamente, verso quale equilibrio si porta la popolazione di Milano nei due casi?

$\bar{N}_{\text{tot}}(\bar{u} = 0) = \dots\dots\dots \bar{N}_{\text{tot}}(\bar{u} = 50000) = \dots\dots\dots$