Esercizio 2 .... 6 punti

Utilizzando i dati in tabella, si stimi il parametro rimanente di un modello ARMA(2,1) che stima i valori di portata, del quale sono noti i parametri autoregressivi pari a 0.88 e $\frac{|N|-|C|}{|N|+|C|}$.

pioggia (p)	[mm]	12	15	10	9	0	0	5	8	8	13	16
portata (q)	[m3/s]	54,50	82,56	109,37	104,75	86,98	79,45	64,91	75,60	69,00	82,73	82,08

Ex 5 – minimi quadrati

Si vuole identificare un modello di previsione di traffico [un ARMA(1,1)] che fornisca una stima del volume orario di veicoli in un certo tronco autostradale B. Si formuli tale modello e se ne tarino i parametri sfruttando i dati in tabella, riportanti il volume orario nello stesso tronco B e il volume orario alla barriera A, posta 200 km prima di B:

volumi	barriera A	482	1352	2534	3634	1824	5151	2978	4500	3461	4104	6212	5204
medi orari	tronco B	1037	949	1616	3589	3943	5243	3452	3342	3852	3168	5966	7407

v_A

v_B

$v_B(t+2) = \alpha\, v_B(t+1) + \beta\, v_A(t)$

$M^T = \begin{bmatrix} 482 & 1352 & - & 4104 \\ 949 & 1616 & & 5966 \end{bmatrix}$

Tema 2

Ex 2 – albero minimo a 2 obiettivi

Scuola di Ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale

POLITECNICO
MILANO 1863

MODELLISTICA E SIMULAZIONE

2a parte: 30 agosto 2023

Cognome e Nome: ....

Esercizio 3 .... 6 punti

Il trasporto di una merce può essere organizzato in uno dei modi indicati nella seguente tabella, insieme al guadagno (che potrebbe anche risultare negativo) e al tempo di trasporto che lo caratterizzano. Si individuino le soluzioni efficienti rispetto ai due obiettivi e la soluzione da preferire attraverso il metodo dell'utopia:

	metodo	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
J_1	guadagno	2([C] −[N])	[C]-[N]	2[N]	[N]-2[C]	4	10	3	7	9	2	5	0
J_2	tempo	2([C] −[N])	2	8	4	7	7	6	5	9	2	8	2

DOMANDA A [tutti] (9 punti)

Una società idroelettrica fa funzionare un serbatoio per massimizzare la produzione di energia che deve essere il più possibile costante.

Del serbatoio è noto l'afflusso stagionale, riportato nella tabella, e si sa che la produzione di energia è circa proporzionale, secondo un coefficiente [N], alla portata rilasciata dal serbatoio (le variazioni di livello sono poco rilevanti). Si ***formuli*** il problema di ottimizzazione che la società deve risolvere, supponendo che l'invaso massimo del serbatoio sia 20 e l'invaso iniziale sia uguale a quello finale e pari a 10, e se ne dia una soluzione ammissibile.

mese	*inverno*	*primavera*	*estate*	*autunno*
afflusso	6	8	7	[C]

Soluzione

7/11 5/12

DOMANDA B [tutti] (9 punti)

Una azienda manifatturiera ha un utile annuo di 1,2 M€ ed emette 2,5 kt di CO2. Volendo migliorare le proprie prestazioni ambientali, commissiona uno studio su come rendere più efficiente e meno inquinante il proprio processo produttivo. Vengono presentate le proposte in tabella.

Quale sarebbe la proposta preferita se si adotta il criterio di scegliere la più vicina alla retta che congiunge la situazione attuale al punto Utopia?

Proposta	A	B	C	D	E
Riduzione emissioni	3%	6%	9%	12%	15%
Aumento utile	10%	[N]%	7%	6%	5%

1,32

Soluzione

DOMANDA B [tutti] (9 punti)

Per quale valore del parametro p il primo dei sistemi lineari discreti caratterizzati dalle seguenti matrici di stato raggiunge l'equilibrio prima degli altri?

$$\mathbf{A}1 = \begin{bmatrix} [\mathrm{N}]/20 & -0{,}8 \\ p & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}2 = [0{,}8] \qquad \mathbf{A}3 = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -1 & 2 \\ 0 & 1{,}3 & [\mathrm{C}]/10 \\ 0 & -2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Soluzione

C.N.S. As. St: $|\lambda_i| < 1 \ \forall i = 1, \dots, n$; se $n=2$ anche $\begin{cases} |tr(A)| < 1 + det(A) \\ |det(A)| < 1 \end{cases}$

$A_1)$ $tr(A_1) = \frac{N}{20}$ $\quad \left|\frac{N}{20}\right| < 1 + 0{,}8p \rightarrow p > \left(\frac{N}{20} - 1\right)/0{,}8 \quad p > \frac{N}{16} - 1{,}25$

$det(A_1) = 0{,}8p \quad |0{,}8p| < 1 \rightarrow -\frac{1}{0{,}8} < p < \frac{1}{0{,}8} \quad \Rightarrow -1{,}25 < p < 1{,}25$

$\Delta_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{N}{20}\lambda + 0{,}8p = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{\frac{N}{20} \pm \sqrt{\frac{N^2}{400} - 3{,}2p}}{2}$ $\quad Re(\lambda_{1,2}) = \frac{N}{40}$

$\Delta = \frac{N^2}{400} - 3{,}2p < 0$ se $p > \frac{N^2}{1280}$ (con $p < 1{,}25$) $\Rightarrow N < \sqrt{1280 \times 1{,}25} = 40$

quindi Δ sempre < 0!

$A_2)$ $\lambda = 0{,}8 \qquad |0{,}8| < 1 \rightarrow \tau = -\frac{1}{\ln(0{,}8)} \cong 4{,}48$

$$A_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 0{,}6 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 1{,}3 & [C]/10 \\ 0 & -2 & 0{,}8 \end{array}\right]$$

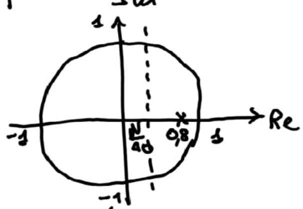
$A_3')$ $\lambda_1 = 0{,}6 \qquad |0{,}6| < 1$

$tr(A_3'') = 2{,}1 > 2$! $\quad$ C.N. As. St.: $|tr(A)| < n$ non rispettata

$det(A_3'') = \dots$

Il sist. non è As. Stabile

Quindi:



il sist. 1 raggiunge prima l'equil. se:

$|\lambda_{1,2}^{A_1}| < 0{,}8$ cioè se

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{N}{20}\right)^2 + \left(\frac{N^2}{400} - 3{,}2p\right)}}{2} < 0{,}8$$

$$\left(\sqrt{\frac{N^2}{200} - 3{,}2p}\right)^{\cancel{2}} < (2 \times 0{,}8)^2 \Rightarrow \frac{N^2}{200} - 3{,}2p < 2{,}56 \dots$$

DOMANDA C1 [6 CFU] (9 punti)

Si dimostri che il sistema $\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_1}{2} + 2x_2 - u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$ con $y = [C]x_1 + [\mathrm{N}]x_2$ non è asintoticamente stabile

e si dica se, e come, è possibile stabilizzarlo con una retroazione $u = hy + w$ sull'uscita.

Soluzione

C.N.S. As. St. $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ se $n=2$ anche $\begin{cases} tr(A) < 0 \\ det(A) > 0 \end{cases}$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1/2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$tr(A') = -3/2 < 0$ ok

$det(A') = -1 - 2 = -3 < 0$ ko!

$(\lambda_3 = -1 < 0$ ok$)$

$u = hy + w = h([C]x_1 + [N]x_2) + v$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} - h[C] & 2 - h[N] & 0 \\ 1 + h[C] & -2 + h[N] & 0 \\ \hline 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$tr(\tilde{A}') = -\frac{3}{2} + h([N] - [C]) < 0 \Rightarrow h < \frac{3}{2([N] - [C])}$

$det(\tilde{A}') = -1 + \cancel{2h[C]} + \frac{h}{2}[N] - \cancel{h^2[N][C]} - 2 + h[N] - \cancel{2h[C]} + \cancel{h^2[N][C]} =$

$= -3 + \frac{3}{2}h[N] > 0 \Rightarrow h > \frac{2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}[N]} = \frac{2}{[N]}$