

Algoritmi di ottimizzazione in Excel

Marco Tangi



POLITECNICO
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Un problema di ottimizzazione generale è formulato come:

Data una funzione $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}$

Determinare gli elementi $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{Z}$ tale che:

- $f(\mathbf{X}_0) \leq f(X) \quad \forall X \in \mathbf{Z}$ minimizzazione
- $f(\mathbf{X}_0) \geq f(X) \quad \forall X \in \mathbf{Z}$ massimizzazione

Un problema di ottimizzazione generale è formulato come:

Data una funzione $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}$

Determinare gli elementi $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{Z}$ tale che:

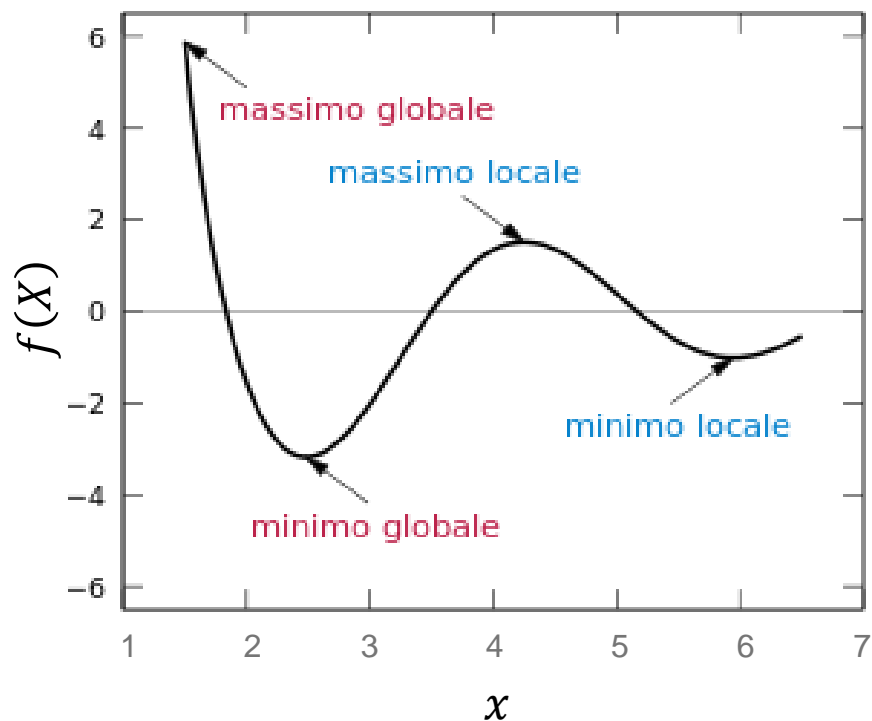
- $f(\mathbf{X}_0) \leq f(X) \quad \forall X \in \mathbf{Z}$ minimizzazione
- $f(\mathbf{X}_0) \geq f(X) \quad \forall X \in \mathbf{Z}$ massimizzazione

- f è la funzione obiettivo, o funzione di costo
- \mathbf{Z} è lo spazio di ricerca
- Gli elementi \mathbf{X} sono una **soluzione al problema** (o portfolio di soluzioni)
- \mathbf{X}_0 è la **soluzione ottima** al problema

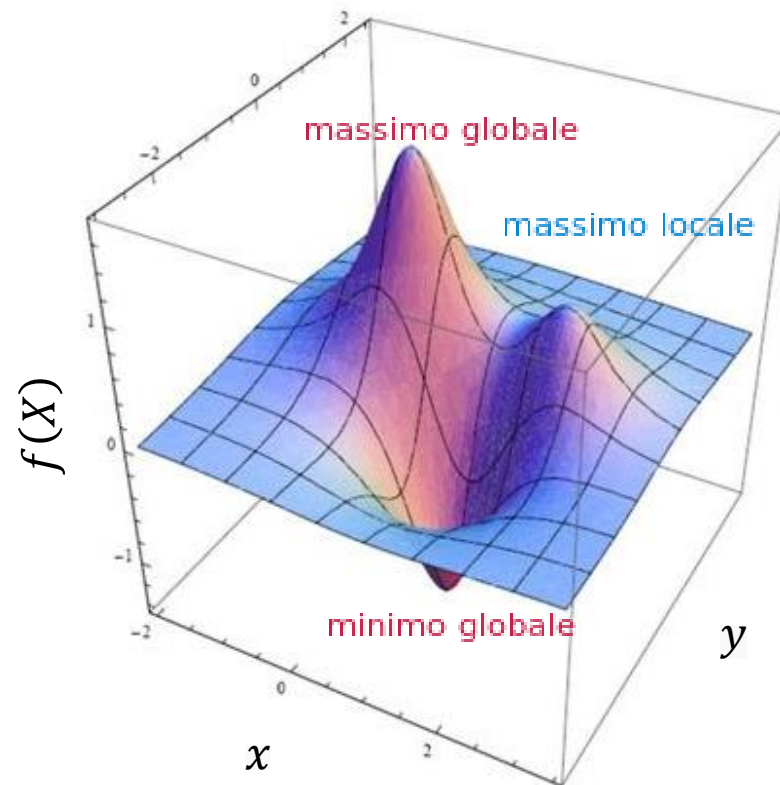
Ripasso: i problemi di ottimizzazione

Il numero di variabili influenza fortemente la complessità del problema

1 variabile
 $X = [x]$



2 variabili
 $X = [x; y]$

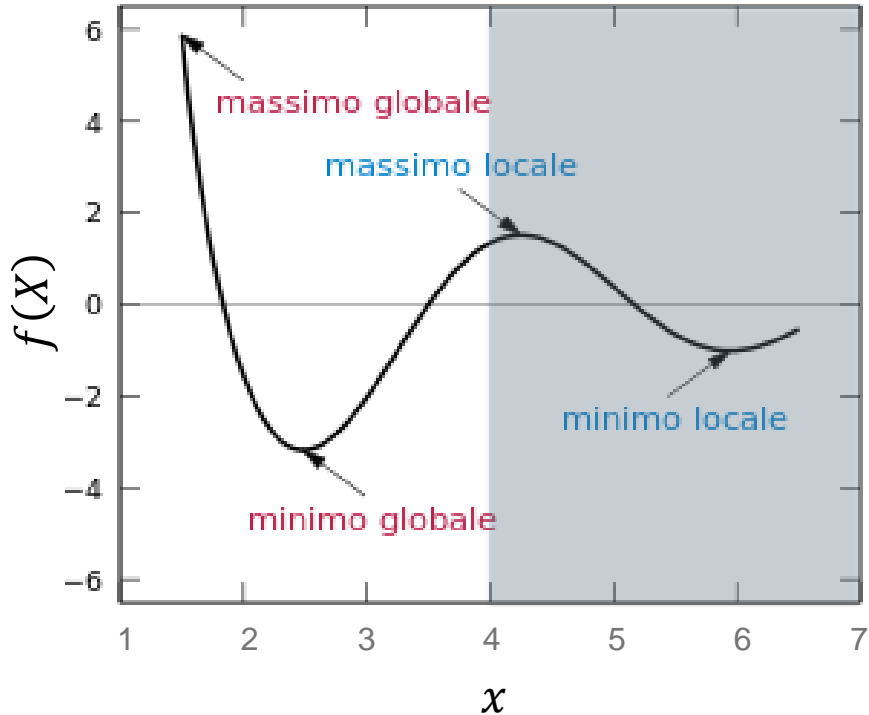


Ripasso: i problemi di ottimizzazione

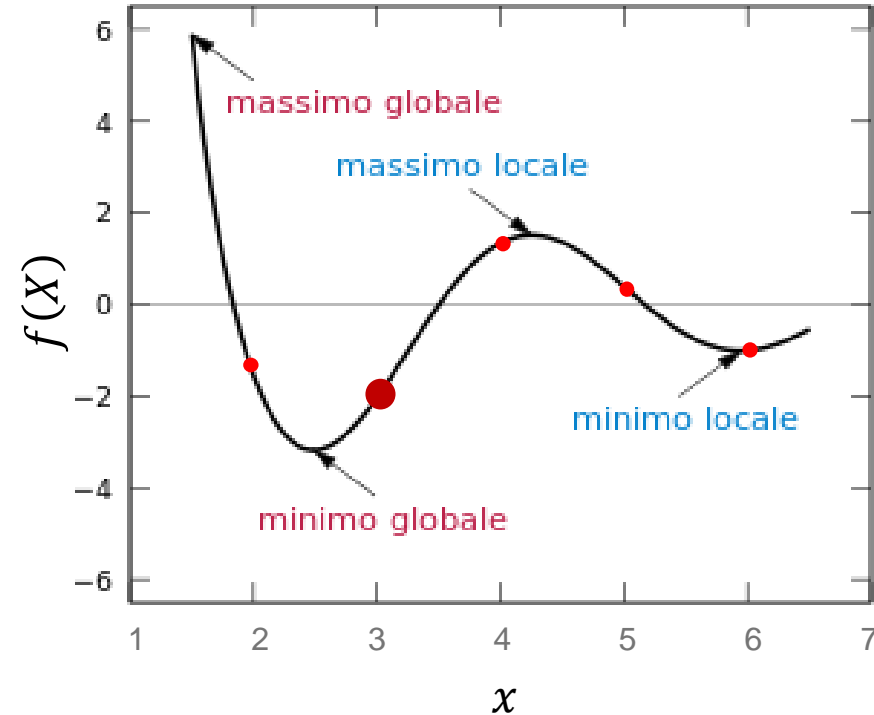
Il numero di variabili influenza fortemente la complessità del problema

Aggiungere vincoli può aiutare a ridimensionare Z , e a ridurre la complessità

Vincolo : $x \leq 4$



Vincolo : x *discreto*



Gli algoritmi di ottimizzazione esplorano Z al fine di trovare X_0

Bisogna ricordarsi però che lo spazio delle soluzioni $f(X)$ in Z non è conosciuto

Possiamo equiparare il processo di identificazione dell'ottimo
a cercare qualcosa in una stanza buia



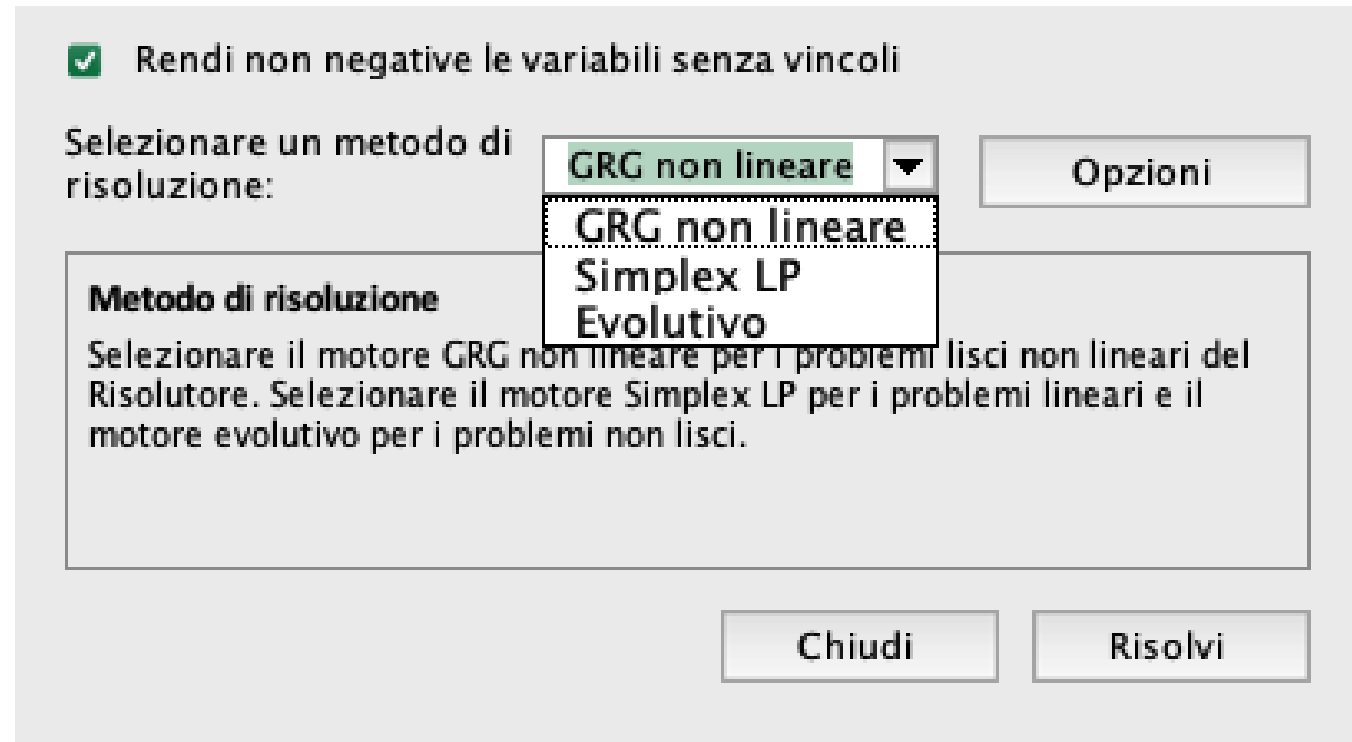
Il punto di ingresso (la condizione iniziale)
diventa importante

Possiamo classificare le performance degli algoritmi in tre categorie

- ❖ **Efficacia:** l'algoritmo è capace di trovare l'ottimo assoluto?
- ❖ **Efficienza:** quanto tempo e dati richiede l'algoritmo per convergere a soluzione?
- ❖ **Flessibilità:** Quanti tipi di problemi possono essere risolti dall'algoritmo?

Nel risolutore Excel sono installati 3 algoritmi di ottimizzazione

1. Simplex LP
2. GRG non lineare
3. Evolutivo



Rendi non negative le variabili senza vincoli

Selezionare un metodo di risoluzione:

GRG non lineare

Opzioni

Metodo di risoluzione

Selezionare il motore GRG non lineare per i problemi lisci non lineari del Risolutore. Selezionare il motore Simplex LP per i problemi lineari e il motore evolutivo per i problemi non lisci.

Chiudi Risolvi

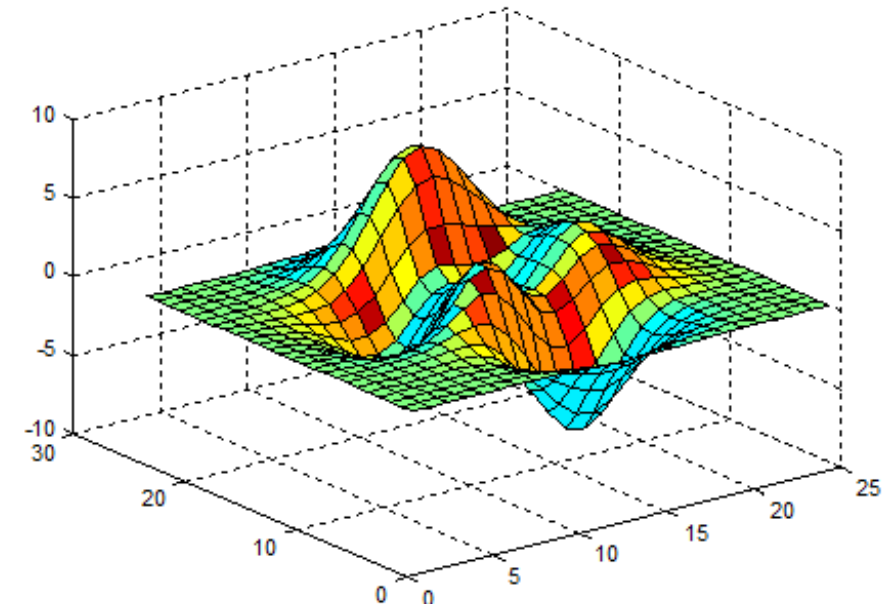
L'algoritmo del simplesso:

- È utilizzabile solo per **problemi di programmazione lineare (LP)**:
L'obiettivo e i vincolo sono funzioni lineari delle variabili di decisione
- Sfrutta la **convessità intrinseca alle relazioni lineari** per trovare **l'ottimo**
- Siccome si basa su metodi numerici iterativi che sfruttano la presenza di sole relazioni lineari, **trova sempre l'ottimo assoluto globale**
- Data la semplicità del problema, **è anche molto veloce**

- ❖ **Efficacia: Massima**, l'ottimo assoluto viene sempre trovato
- ❖ **Efficienza: Ottima**
- ❖ **Flessibilità: Bassa**, applicabile solo per problemi lineari

Nonlinear Generalized Reduced Gradient (GRG):

- Calcola in ogni step il **gradiente della funzione obiettivo** delle variabili di decisione
- Considera la soluzione come ottima quando le **derivate parziali sono zero**
- Siccome analizza il **gradiente a partire dal punto iniziale**, può identificare minimi locali come soluzioni ottime

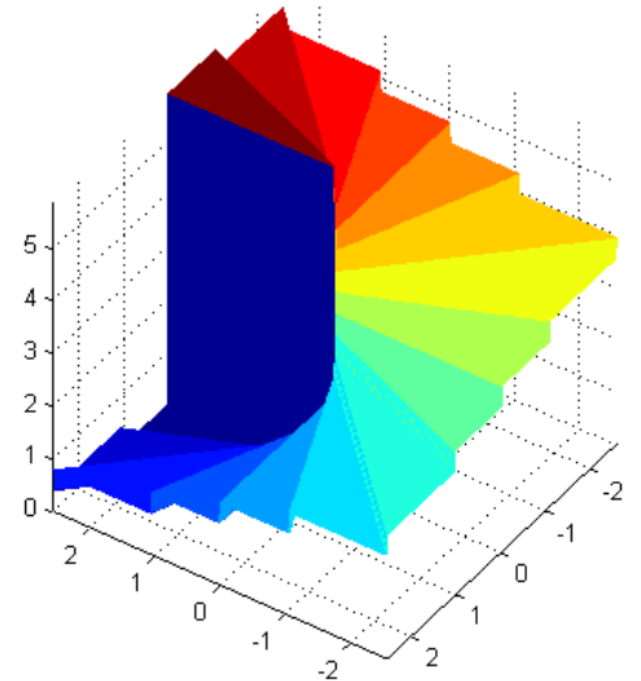


Il colore di ogni cella indica il valore del gradiente

Nonlinear Generalized Reduced Gradient (GRG):

- Calcola in ogni step il **gradiente della funzione obiettivo** delle variabili di decisione
- Considera la soluzione come ottima quando le derivate parziali sono zero
- Siccome analizza il **gradiente a partire dal punto iniziale**, può identificare minimi locali come soluzioni ottime
- Di conseguenza, è **più efficace per problemi nonlineari «smooth»**, con gradienti sempre continui

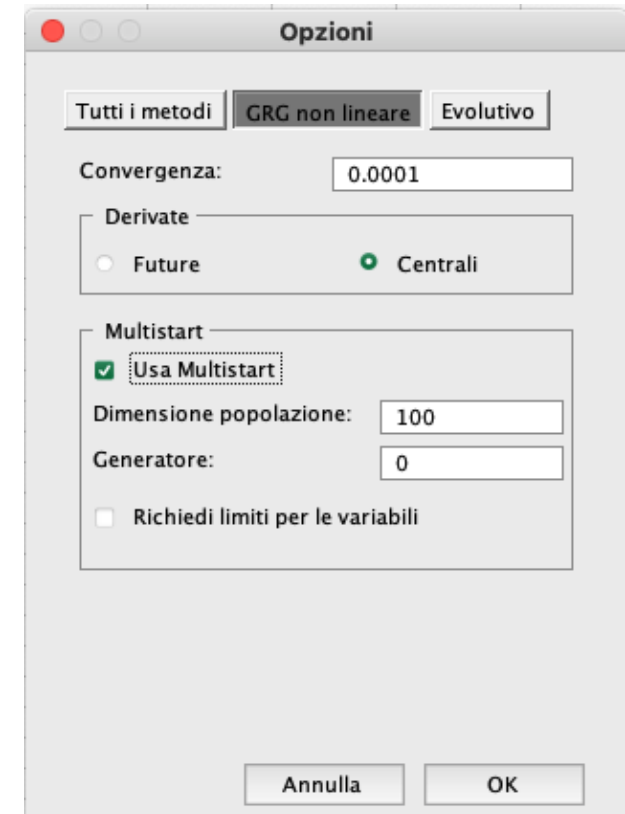
- ❖ Efficacia: **Discreta**, può rimanere bloccato in minimi locali
- ❖ Efficienza: **Buona**
- ❖ Flessibilità: **Buona**, applicabile per problemi nonlineari «smooth»



Nonlinear Generalized Reduced Gradient (GRG):

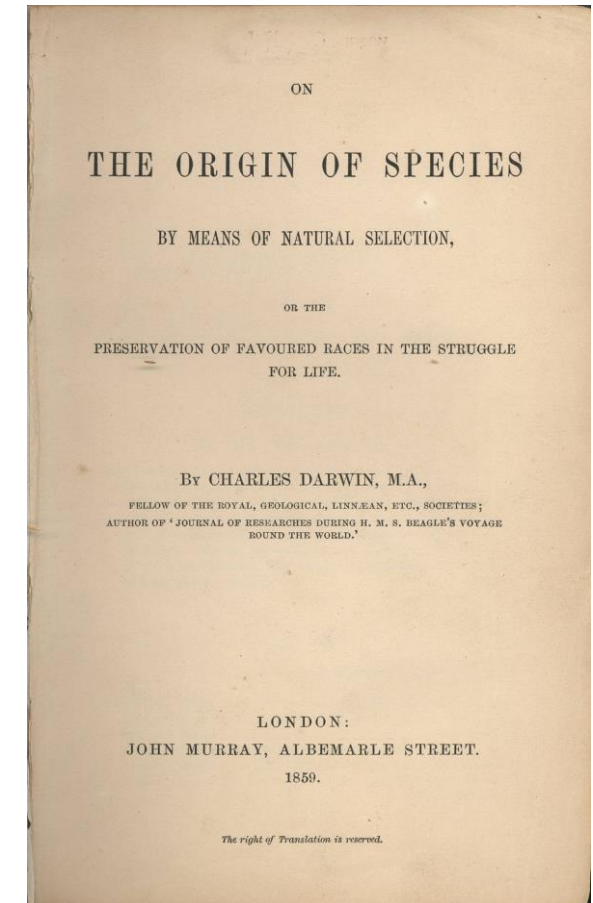
Usare l'opzione «Usa Multistart» nella finestra «Opzioni» del risolutore può ridurre il rischio di finire in ottimi locali, incrementando il numero di posizioni iniziali da analizzare in parallelo

Ovviamente, l'algoritmo richiederà un maggiore tempo computazionale



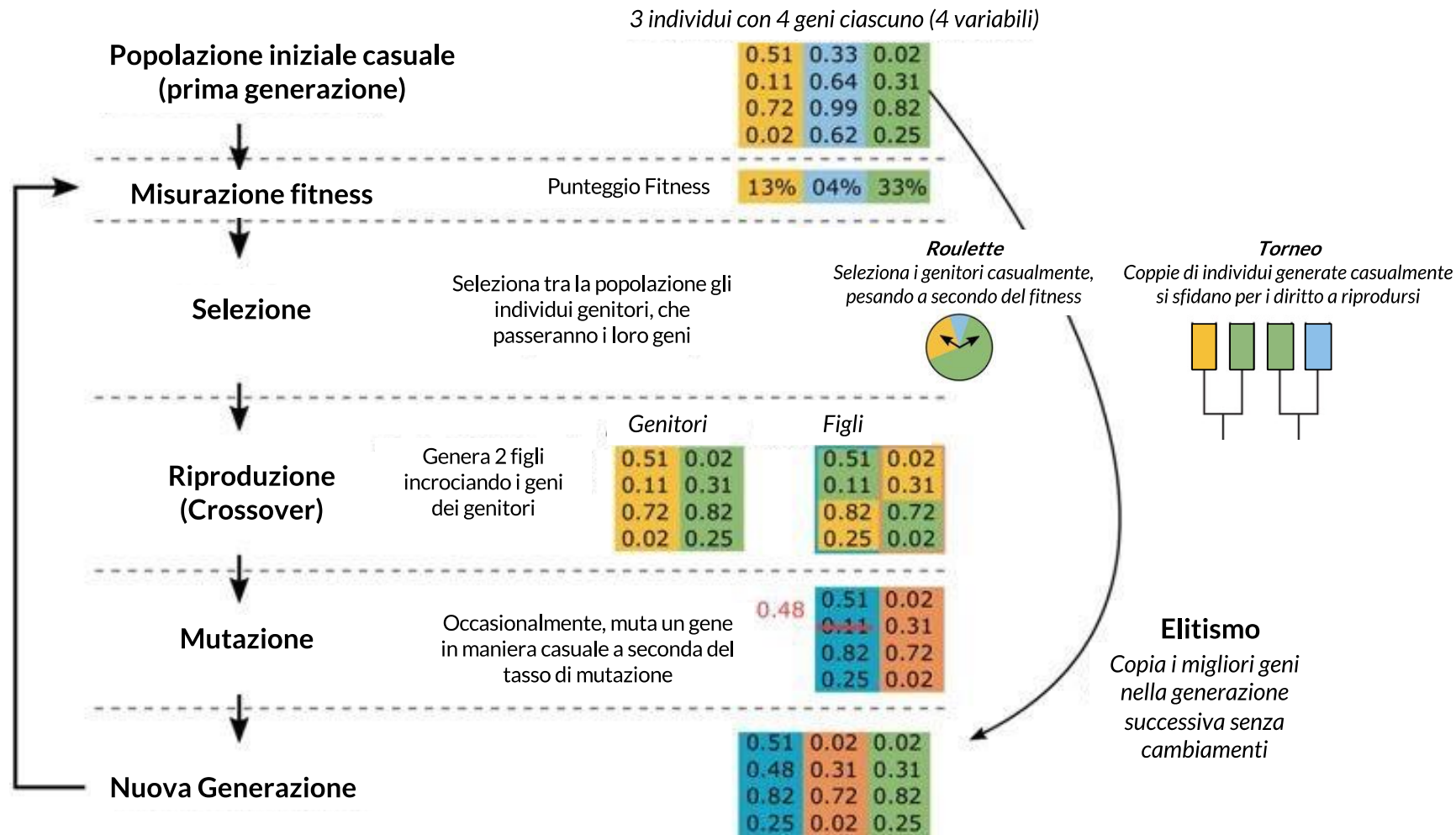
Algoritmo evolutivo

- Utilizza i **principi di selezione naturale** per trovare soluzioni ottime
- Ogni **soluzione** è considerata come un **individuo** con un certo **fitness**, il valore della funzione obiettivo
- In ogni generazione, **gli individui in una popolazione ristretta competono tra di loro**
- **Gli individui con fitness maggiore possono «riprodursi»** generando una nuova popolazione nella generazione successiva
- Di generazione in generazione, **gli individui saranno sempre più ottimizzati secondo il loro fitness**



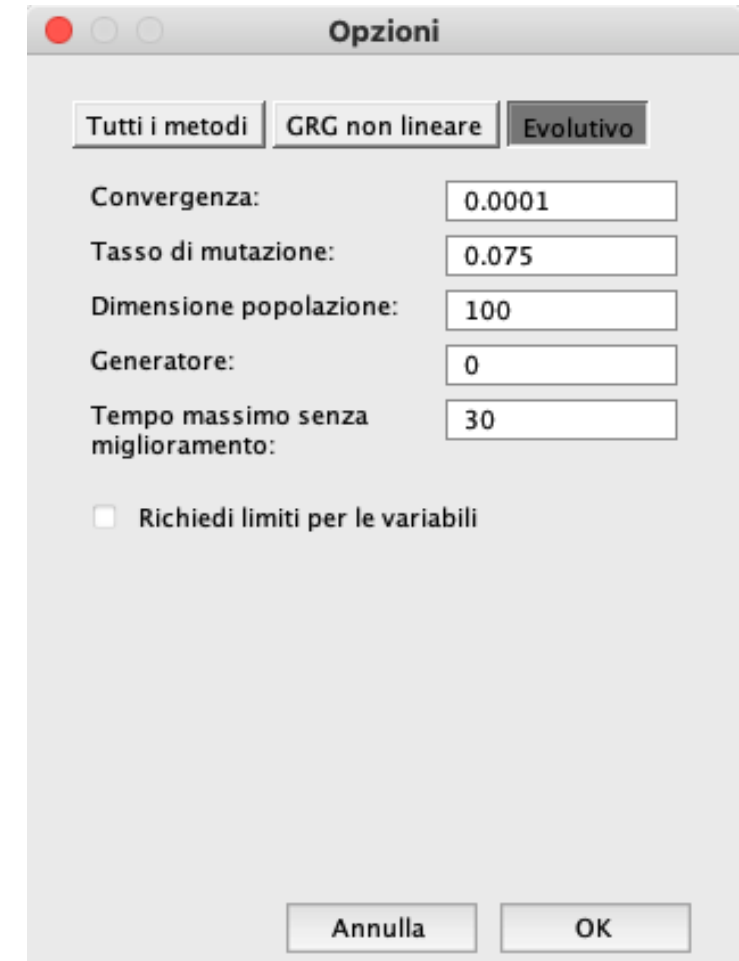
Algoritmo evolutivo

Obiettivi in ogni passaggio: Incrementare il fitness e mantenere una buona diversità nella popolazione



Algoritmo evolutivo

- Nella finestra «Opzioni» del risolutore potete modificare alcuni parametri dell'algoritmo.
- Gli algoritmi genetici tipicamente richiedono di definire **limiti nelle variabili**, al fine di contenere il massimo potenziale delle mutazioni nelle variabili



Gli algoritmi evolutivi sono

- ❖ Efficaci?
- ❖ Efficienti?
- ❖ Flessibili?

Possiamo osservare gli effetti dell'evoluzione in natura per la risposta

Algoritmo evolutivo

I processi evolutivi sono estremamente **efficaci e flessibili**, che portano alla creazione di **specie** perfettamente adattate per sfruttare la grande varietà di nicchie ecologiche disponibili



Formiche Cephalotes



Talpa stellata



Squalo dal collare

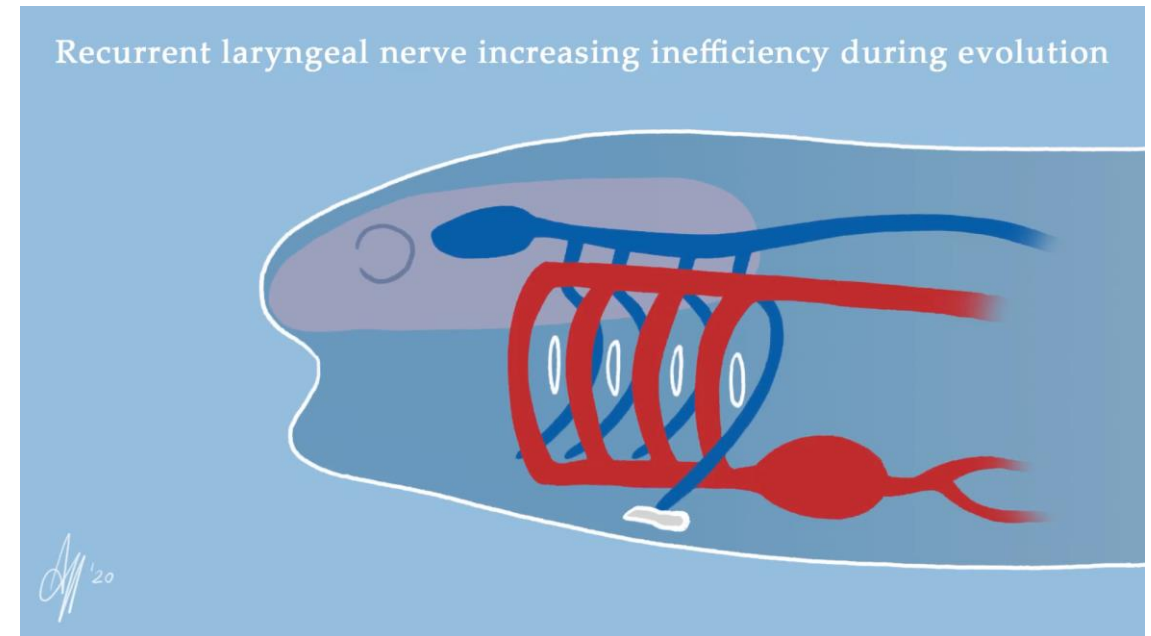
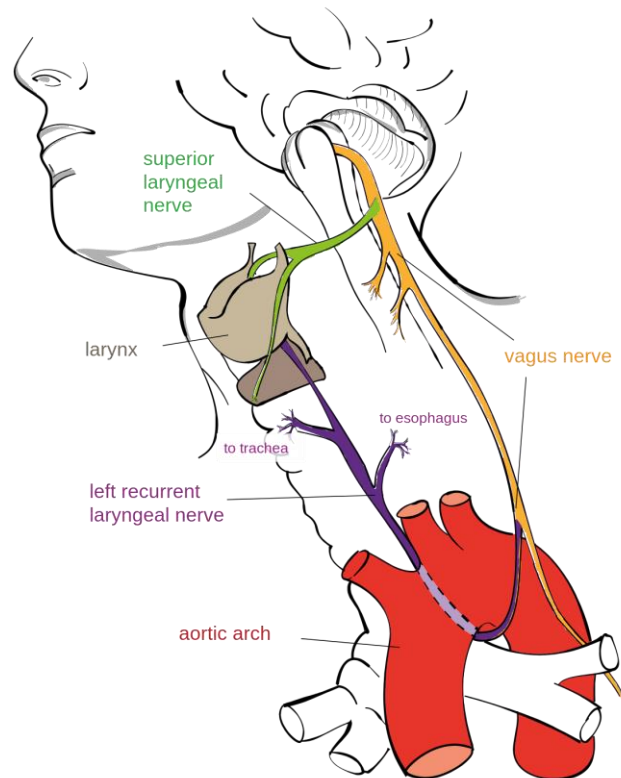


Mantide orchidea

Algoritmo evolutivo

Spesso, i processi evolutivi non sono **efficienti**, in quanto possono solamente apportare piccoli cambiamenti incrementali a strutture già presenti

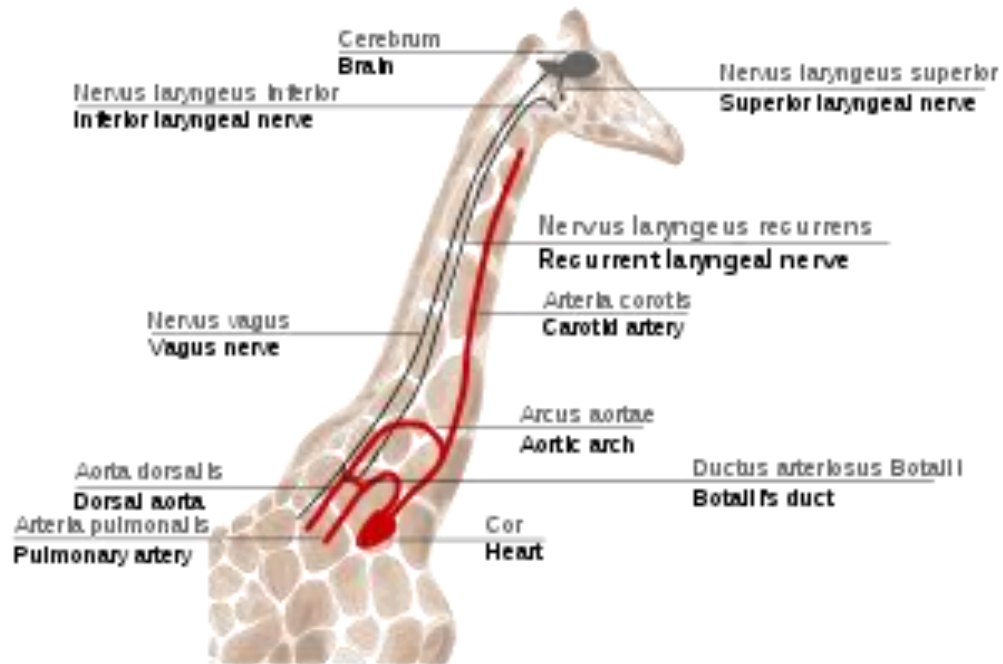
Esempio: Nervo Laringeo Ricorrente



Algoritmo evolutivo

Spesso, i processi evolutivi non sono **efficienti**, in quanto possono solamente apportare piccoli cambiamenti incrementali a strutture già presenti

Esempio: Nervo Laringeo Ricorrente



Giraffa : 4.5 metri



Argentinosaurus

Nonostante gli algoritmi evolutivi operino in contesti molto limitati rispetto all'evoluzione naturale, ne condividono i principi di base

- ❖ **Efficacia: Buona**, se la popolazione e il tasso di mutazione sono definiti correttamente in modo da esplorare larghe porzioni dello spazio di ricerca
- ❖ **Efficienza: Bassa**, in quanto si appoggia a processi casuali per cercare le soluzioni ottime
- ❖ **Flessibilità: Ottima**, applicabile a una grande varietà di problemi, inclusi problemi nonlineari non «smooth». Il tempo computazionale può essere un fattore limitante