

## DECISIONI IN AMBIENTE INCERTO

$$\left. \begin{array}{l} \min_z [J(z, \omega)] \\ z \in Z \quad \omega \in \Omega \end{array} \right\} \begin{array}{l} z \text{ è il vettore delle decisioni} \\ \omega \text{ è il vettore di } \underline{\text{variabili incerte}} \end{array}$$

### Esempio 1 (caso discreto)

Le decisioni possibili sono tre (a, b, c)

I possibili valori di  $\omega$  sono tre (1, 2, 3)

$z \setminus \omega$	1	2	3
a	15	17	18
b	35	20	30
c	-5	25	45

La tabella rappresenta dei costi da minimizzare.

Se non si hanno informazioni sulle probabilità che  $\omega=1$ ,  $\omega=2$ ,  $\omega=3$  si può scegliere in uno dei modi seguenti:

a) A caso (si sorteggia tra a, b, c)

b) Con prudenza: si sceglie a perché questa decisione ottimizza il caso peggiore:

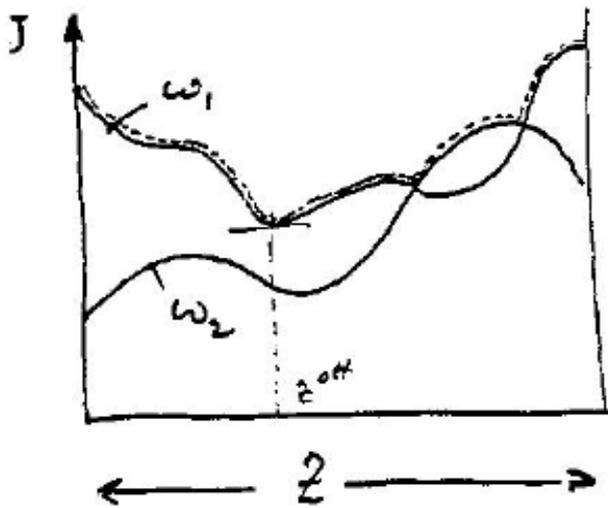
$$\left( \begin{array}{l} \max_{\omega} J(a, \omega) < \max_{\omega} J(b, \omega) \\ \max_{\omega} J(a, \omega) < \max_{\omega} J(c, \omega) \end{array} \right)$$

c) Con fiducia: si sceglie c perché solo così si può ottenere il minimo assoluto di J.

Il secondo criterio (quello della prudenza) è molto usato ed è anche noto come criterio del min-max, perché:

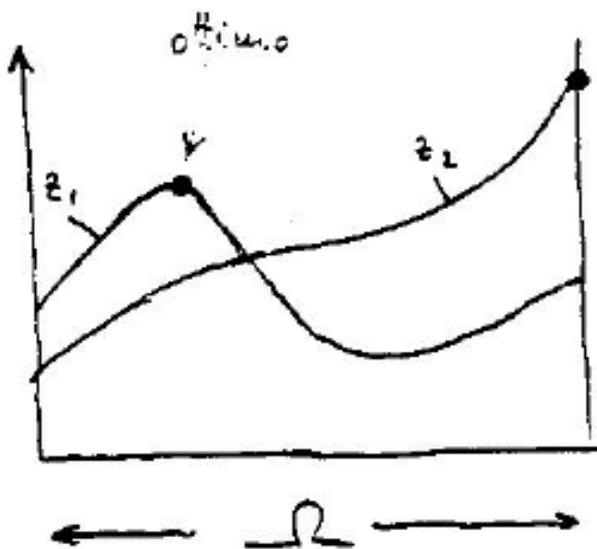
$$\min_z \left[ \max_{\omega} J(z, \omega) \right]$$

Esempio 2 (Z è continuo ma  $\Omega$  è discreto)



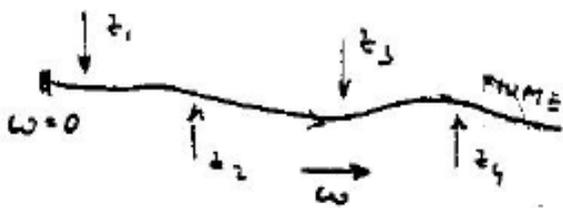
$$\min_z \left[ \max_{\omega} J(z, \omega) \right]$$

Esempio 3 (Z è discreto ma  $\Omega$  è continuo)



$$\min_z \left[ \max_{\omega} J(z, \omega) \right]$$

Esempio 4 (Z è continuo e  $\Omega$  è continuo)



$\Omega$  = temperatura

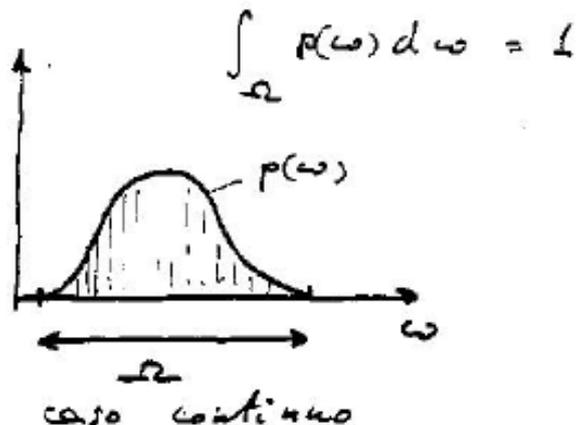
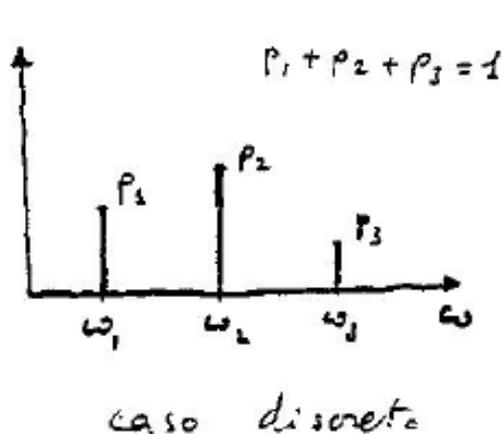
$Z = (z_1 \dots z_4)^T$  = vettore degli scarichi

$$\min_z \left[ \max_{\omega} J(z, \omega) \right]$$

$J(z, \omega)$  = deficit di ossigeno nel punto 4, che dipende dalla variabile esterna  $\omega$ .

## Ottimizzazione stocastica

Della grandezza  $\omega$  si conosce a volte la distribuzione di probabilità



In questi casi il problema

$$\begin{cases} \min_z J(z, \omega) \\ z \in Z \quad \omega \in \Omega \end{cases}$$

può essere risolto in uno dei seguenti modi:

### A. Ottimizzazione del valor medio

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_z E[J(z, \omega)] \\ z \in Z \end{array} \right\} \text{ dove } E[J(z, \omega)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i J(z, \omega_i) \\ \int_{\Omega} J(z, \omega) p(\omega) d\omega \end{cases}$$

### B. Minimizzazione della varianza

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_z \text{var}[J(z, \omega)] \\ z \in Z \end{array} \right\} \text{ dove } \text{var}[J(z, \omega)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n [J(z, \omega_i) - E[J(z, \omega)]]^2 \\ \int_{\Omega} [J(z, \omega) - E[J(z, \omega)]]^2 p(\omega) d\omega \end{cases}$$

## Teoria delle Decisioni

In certi problemi decisionali oltre alle variabili  $z$  caratterizzanti l'operatore e le variabili  $\omega$  caratterizzanti il caso, si hanno altre variabili che rappresentano il risultato di possibili esperimenti. In altre parole l'operatore effettua certi esperimenti e sulla base dei risultati dell'esperimento prende la decisione. I risultati degli esperimenti verranno indicati con  $y$  e l'insieme di tutti i risultati possibili sarà  $Y$ .

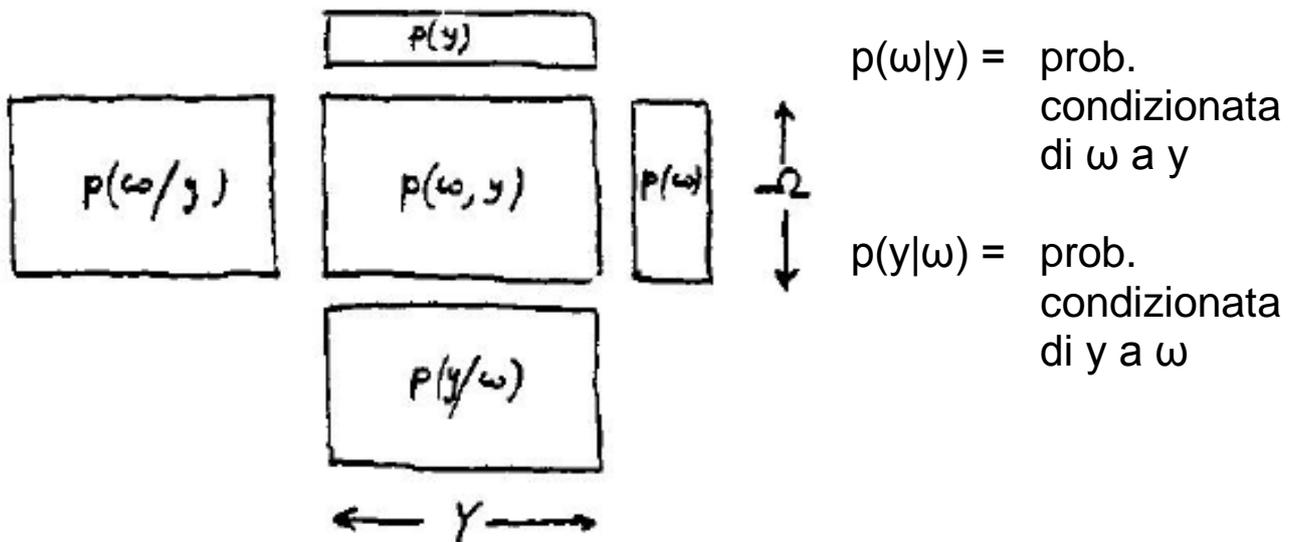
N.B. Il risultato dell'esperimento è solo una stima del possibile valore dell'ambiente esterno e quindi aumenta la probabilità che sia di un certo tipo piuttosto che di un altro. Es. il tipo di sedimenti estratti da un pozzo di esplorazione migliorano le conoscenze sulla composizione del terreno e quindi aumentano o diminuiscono le probabilità che si possa trovare un giacimento di petrolio o una falda acquifera.

Benché la teoria delle decisioni si occupi in generale del problema decisionale con possibilità di esperimenti, nel seguito ci limiteremo ad esaminare il caso discreto in cui gli insiemi  $Z$ ,  $\Omega$ ,  $Y$  sono finiti e il risultato cercato sia un valore medio. In questi casi è classico descrivere il problema su un grafo che si chiama albero delle decisioni.

Questi risultati possono essere estesi anche alla ricerca dell'intera distribuzione di probabilità. Esistono per questo numerosi programmi.

## Formula di Bayes

Nella formulazione e nella soluzione di un problema di TD è importante tener presente che esistono cinque tipi di probabilità tra loro variamente interconnesse:



$$p(\omega, y) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(y) \\ p(\omega) \\ p(y|\omega) \\ p(\omega|y) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Somma per colonne di } p(\omega, y) \\ \text{Somma per righe di } p(\omega, y) \\ \} \text{ dalla } \underline{\text{formula di Bayes}} \end{array} \right. \curvearrowright$$

$$p(\omega, y) = p(y|\omega) \cdot p(\omega) \longrightarrow p(y|\omega) = \frac{p(\omega, y)}{p(\omega)}$$

$$p(\omega, y) = p(\omega|y) \cdot p(y) \longrightarrow p(\omega|y) = \frac{p(\omega, y)}{p(y)}$$

Nell'albero delle decisioni (vedi seguito) servono le probabilità  $p(\omega|y)$  che esprimono la frequenza dei valori di  $\omega$  in funzione del risultato  $y$  dell'esperimento.

Esempio di calcolo della probabilità condizionata

Un barometro indica tre possibilità (misure):

$y_1$  = bel tempo

$y_2$  = variabile (incerto)

$y_3$  = brutto tempo

Supponiamo che nei riguardi di una certa decisione (vedi seguito) interessi sapere se durante il giorno pioverà o non pioverà, cioè:

$\omega_1$  = non piove

$\omega_2$  = piove

Effettuando una statistica si possono stimare le probabilità  $p(\omega, y)$ , per esempio:

	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$\omega_1$	.24	.10	.06
$\omega_2$	.12	.18	.30

La somma di tutti gli elementi è evidentemente = 1

Da questa tabella si ricavano tutte le altre probabilità:

	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$p(y)$	.36	.28	.36

.67	.36	.17	.24	.10	.06	.40	$\omega_1$
.33	.64	.83	.12	.18	.30	.60	$\omega_2$

.60	.25	.15	.60	.25	.15	← $p(y/\omega)$ (somma per righe = 1)
.20	.30	.50	.20	.30	.50	

↑  
 $p(\omega/y)$   
(somma per colonne = 1)

### Esempio di problema di TD

Il signor Nelson, prima di andare in vacanza, deve decidere come vestirsi (leggero, intermedio, pesante) e se comprare o no un barometro (del tipo di quello descritto in precedenza) (del costo di 0.1 unità) per facilitare le sue decisioni. La funzione obiettivo  $J(z,\omega)$ , da minimizzare, rappresenta il disagio di trovarsi con l'abbigliamento non adatto alle condizioni atmosferiche. Tale funzione è espressa dalla seguente tabella:

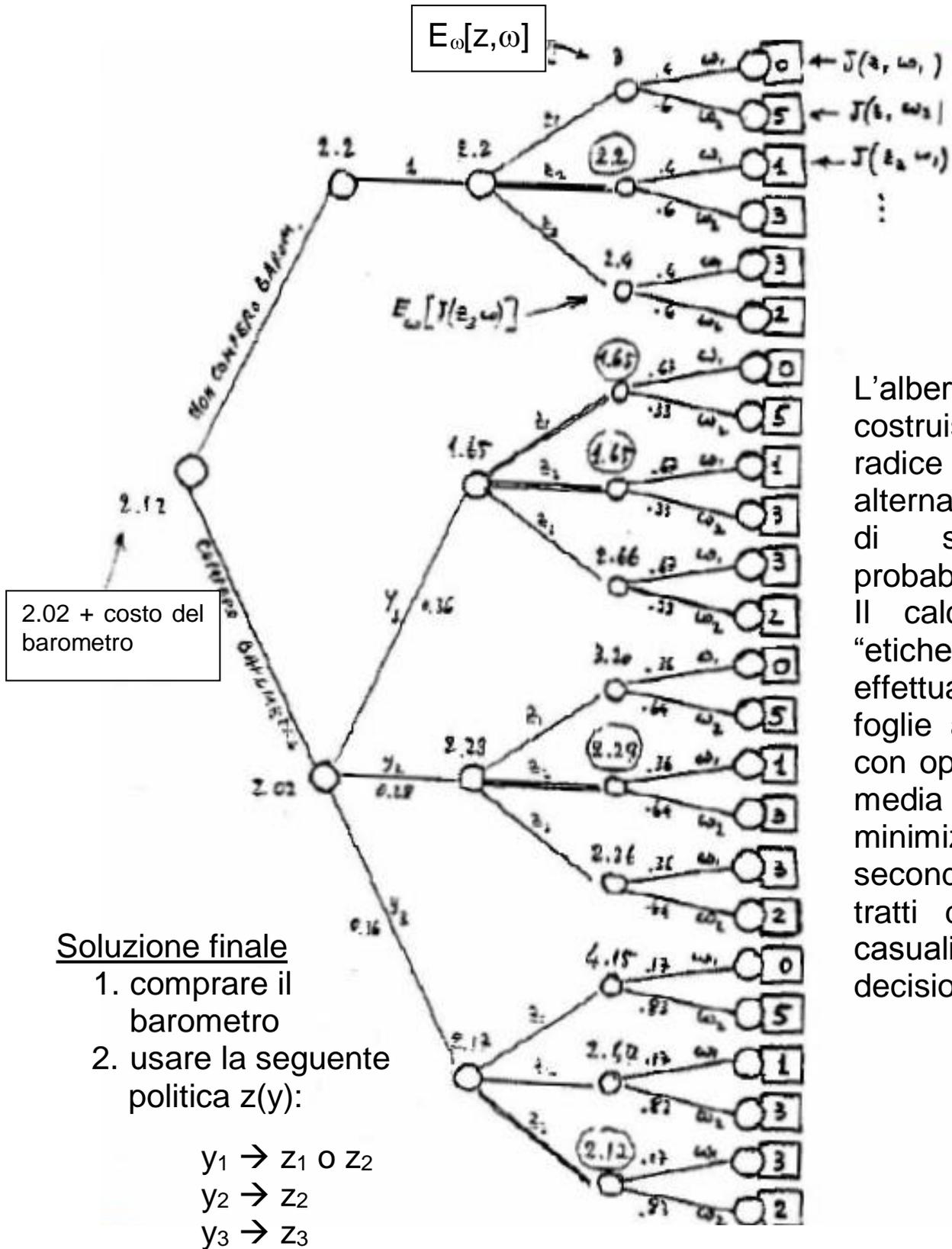
$z$	$\omega_1$	$\omega_2$		
$z_1$	0	5	←	abbigliamento <u>leggero</u>
$z_2$	1	3	←	" <u>intermedio</u>
$z_3$	3	2	←	" <u>pesante</u>

↑                      ↑  
non piove            piove

La decisione complessiva è (comprare o non comprare il barometro) e (come vestirsi). La decisione prescelta sarà quella che minimizza il valore atteso del disagio e del costo (eventuale) del barometro.

Esempio di albero delle decisioni

Il problema precedentemente descritto può essere rappresentato sul seguente grafo ad albero, detto appunto albero delle decisioni.



L'albero si costruisce dalla radice alle foglie alternando nodi di scelta e probabilità. Il calcolo delle "etichette" si effettua dalle foglie alla radice con operazioni di media e di minimizzazione a seconda che si tratti di variabili casuali ( $\omega$ ,  $y$ ) o decisionali ( $z$ )

- Soluzione finale
1. comprare il barometro
  2. usare la seguente politica  $z(y)$ :

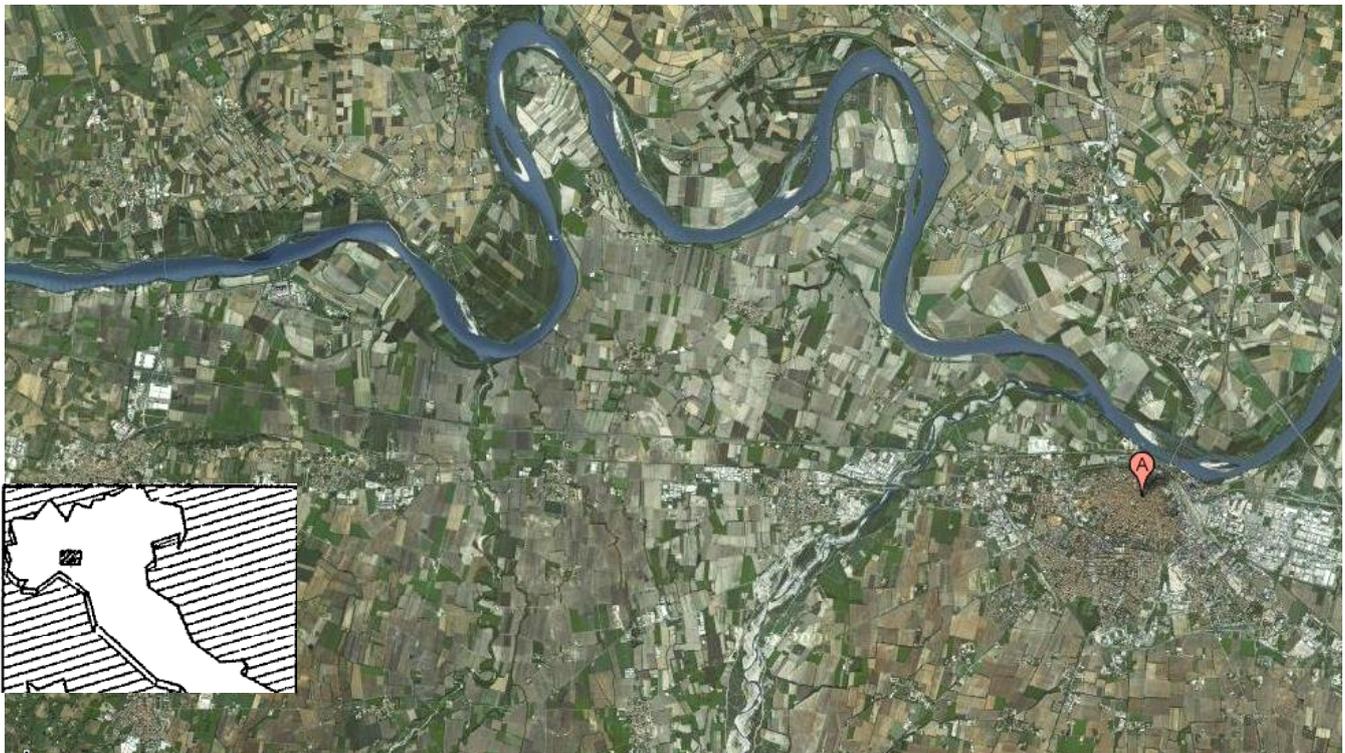
- $y_1 \rightarrow z_1 \text{ o } z_2$
- $y_2 \rightarrow z_2$
- $y_3 \rightarrow z_3$

# AMBIENTE INCERTO – CASO DI STUDIO

## Controllo della qualità dell'aria a Piacenza

Vedi: Finzi, Guariso; [Optimal air pollution control strategies: a case study](#); *Ecological Modelling*, 64, 221-239, 1992.

- Fissare le emissioni di un certo numero di sorgenti di SO<sub>2</sub> (che producono energia elettrica) a COSTO MINIMO
- Le decisioni sono: il contenuto di zolfo nel combustibile e le tecnologie di abbattimento in ciascun impianto
- Occorre garantire la produzione di energia presente (e futura)
- Le emissioni devono soddisfare la normativa che prevede la possibilità di superare una determinata soglia di concentrazione solo il 2% del tempo (in realtà esistono 2 soglie e due diverse probabilità di superamento).





- 2 grandi centrali elettriche (una a La Casella con due ciminiere di 200 m, la seconda vicino a Piacenza con due camini di 200 m e due di 47 m),
- 13 impianti industriali principali,
- 21 impianti industriali minori e riscaldamento domestico complessivamente pari a meno dell'1% delle emissioni complessive.

**TOTALE: 36 sorgenti,  $i = 1, 2, \dots, 36$**

Ogni sorgente può modificare le sue emissioni

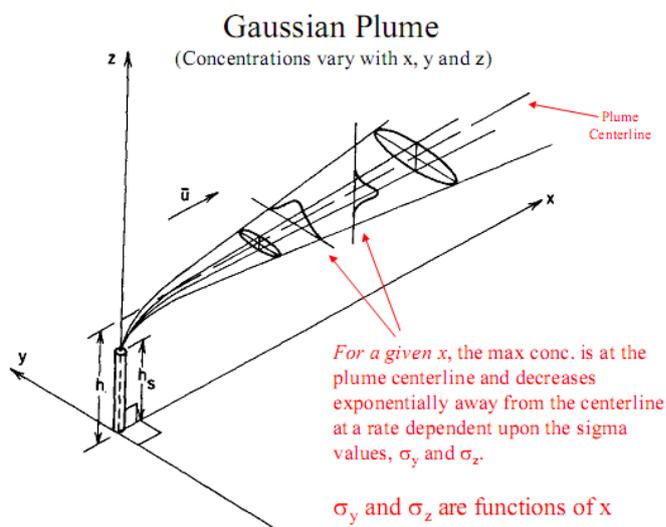
- passando a un combustibile con minor contenuto di zolfo (BTZ)
- aggiungendo sistemi di trattamento dei fumi.

Queste decisioni possono essere interpretate come l'utilizzo di certe quantità  $q_{ik}$  di combustibile trattato con la tecnologia  $k$ ,  $k=1, \dots, K_i$ , a un costo unitario  $c_k$ , con un fattore di emissione  $s_k$  e una produzione di energia  $p_k$ .

**TOTALE: 129 variabili di decisione  $q_{ik}$**

Per calcolare l'effetto di ciascuna emissione (sorgente) in ciascun punto del dominio (recettore) in ciascuna condizione meteo, è necessario UN MODELLO.

In molti casi si utilizza modello all'equilibrio, del cosid-detto "pennacchio gaussiano".



un  
quello

## LA FORMULA DEL MODELLO GAUSSIANO

Pollutant concentration as a function of downwind position (x,y,z)  
Mass emission rate  
"Effective" stack height, including rise of the hot plume near the source

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi \mu \underbrace{\sigma_y \sigma_z}_{\text{Corresponds to disk area in simple model (values depend upon downwind distance, x)}} \left\{ \exp\left(\frac{-(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right) + \exp\left(\frac{-(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right) \right\} \left\{ \exp\left(\frac{-(y)^2}{2\sigma_y^2}\right) \right\}$$

Wind speed evaluated at "effective" release height  
Distribution of mass in vertical dimension (z) at a given downwind distance, x (includes the effect of surface reflection)  
Distribution of mass in cross-wind dimension (y) at a given downwind distance, x

- E' LINEARE nelle emissioni (gli effetti di più sorgenti si sommano)
- Dipende dalle condizioni meteo

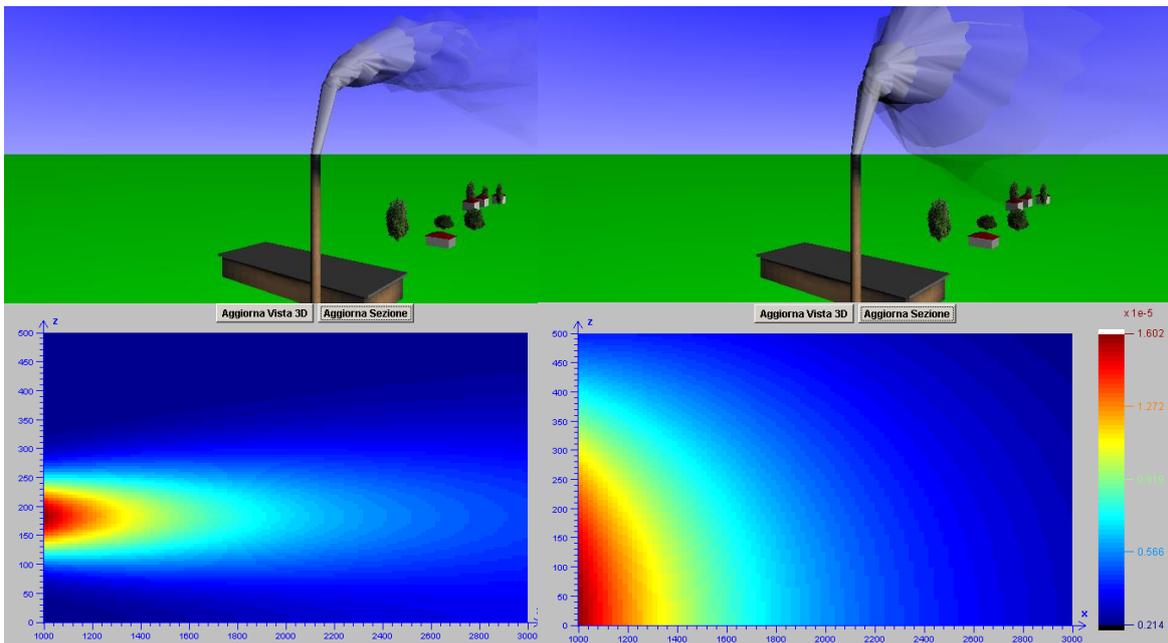
Formule di Briggs per terreno aperto		
Classi di stabilità di Pasquill	$\sigma_y$	$\sigma_z$
A (molto instabile)	$0.22x (1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.20x$
B	$0.16x (1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.12x$
C	$0.11x (1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.08x (1 + 0.0002x)^{-1/2}$
D	$0.08x (1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.06x (1 + 0.0015)^{-1/2}$
E	$0.06x (1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.03x (1 + 0.0003x)^{-1}$
F (elevata stabilità)	$0.04x (1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.016x (1 + 0.0003x)^{-1}$

Formule per il calcolo dell'altezza efficace (asse del pennacchio). Anche questa dalle condizioni meteo.

$$H_{eff} = H + \frac{(1.6 * \exp(\frac{\ln f_0}{3}) * \exp(\frac{2 * \ln(3.5 * x_0)}{3}))}{u}$$

where  
 H = physical height of the stack (in meters)  
 u = wind speed (in meters per second)  
 $f_0$  and  $x_0$  are given by the formulas  
 $f_0 = 3.12 * 0.785 * v_0 * d^2 * \frac{t_0 - t_1}{t_0}$   
 and  
 if  $f_0 > 55$ , then  $x_0 = 34 * \exp(0.4 * \ln(f_0))$   
 if  $f_0 \leq 55$ , then  $x_0 = 14 * \exp(0.625 * \ln(f_0))$

dipende



Sezioni verticali  $1000 \leq x \leq 3000$  m,  $0 \leq z \leq 500$  m  
 Atmosfera neutra (D)                      Atmosfera instabile (A)

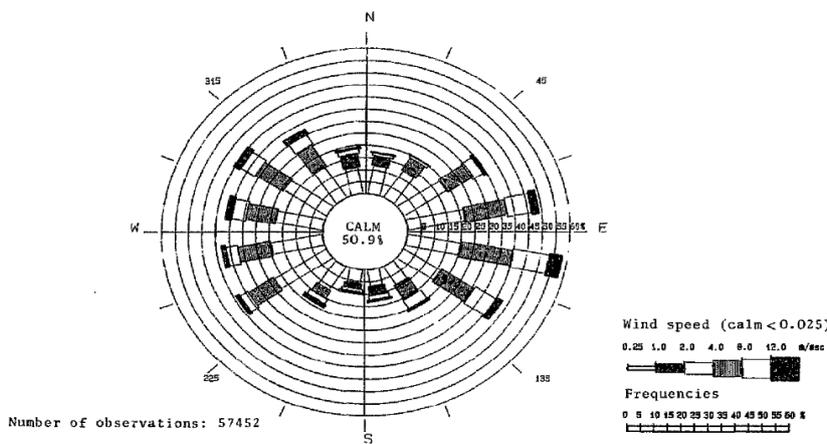


Fig 3. Piacenza wind rose for the period 1951–1987. Calm conditions prevail.

Ogni condizione meteo m ha una probabilità



## RISULTATI

Soglia sui valori medi a  $160 \mu\text{g}/\text{m}^3$ .

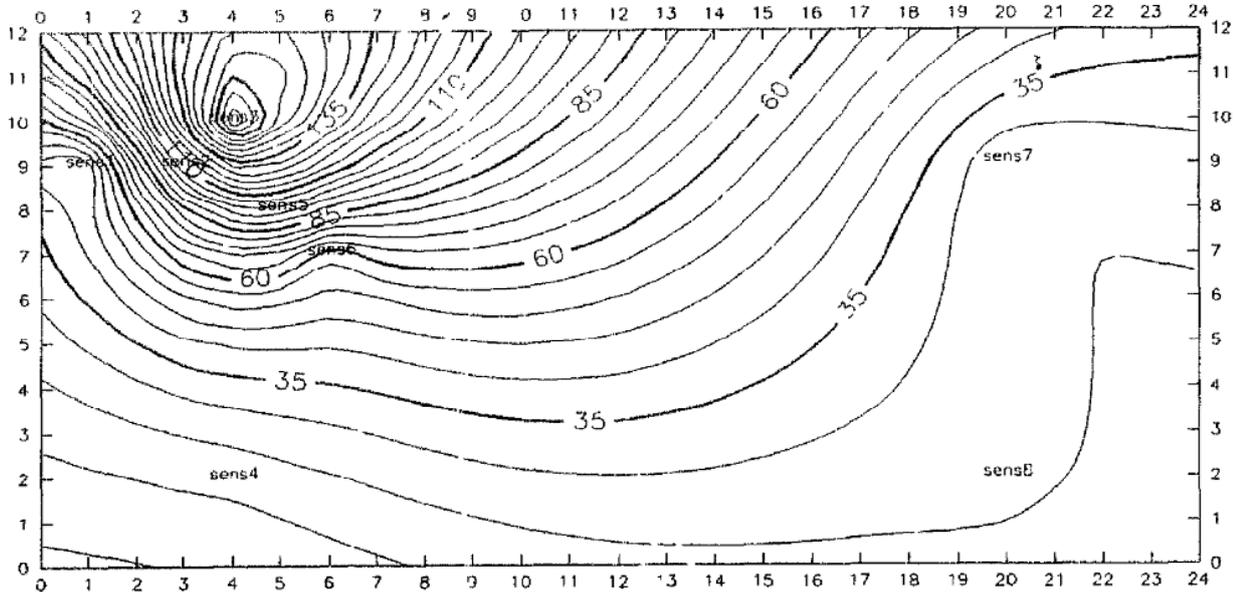


Fig. 1. Sulphur dioxide concentrations ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ) in the  $24 \times 12$  km region of Piacenza–Castel San Giovanni (northern Italy). The values are plotted from the results computed for eight sensors for a median threshold value of 160.

### Problema a due obiettivi

- Min Costi ( $Sc_k q_{ik}$ )
- Min Inquinamento ( $T$ )

valori annuali in lire

(1 €  $\cong$  2000 lire)

