MODELLO DISCRETO LINEARE

Il parco auto

Calcolo delle emissioni annue E(t) da autovetture in una regione:

$$E(t)=\Sigma_{tipo}\Sigma_{età}\,(auto_{tipo,età}\cdot emissione_{tipo,età}\cdot percorrenza)$$

Variabili di stato

$x_i(t)$ numero di auto di età i nell'anno solare t.

Variabili di ingresso

$u_j(t)$ immatricolazioni nell'anno t.

Variabili di uscita

$y_k(t)$ numero auto totale nell'anno t, emissione totale, valore economico del parco,…

$x_1(t+1)= u\,(t)$

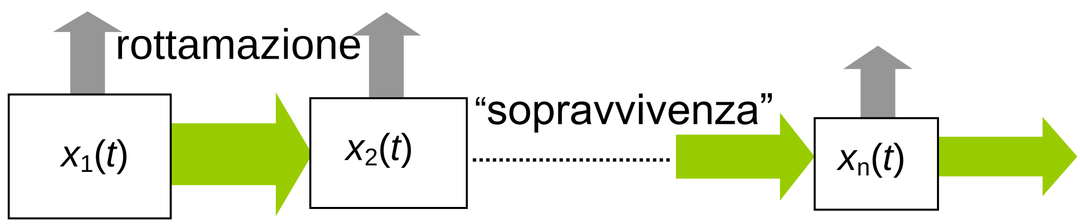
$x_2(t+1)= s_1 x_1(t)$

…………

$x_n(t+1)= s_{n-1}x_{n-1}(t) + [s_n x_n(t)]$

$y_1(t)= x_1(t) + x_2(t) +…+x_n(t)$

$y_2(t)= b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) +…+b_3 x_n(t)$



Il tempo avanza con i numeri interi → modello (tempo) discreto (descritto da un sistema di equazioni algebriche)

Lo stato e le uscite sono funzioni lineari → modello lineare

MODELLO CONTINUO NON LINEARE
diffusione di una malattia infettiva

Modello con due tipi di individui: suscettibili (possono contrarre la malattia) e malati (possono trasmettere la malattia e guarire)

Variabili di stato
$x_i(t)$ densità di individui del tipo i (i=1 suscettibili, i=2 malati) nell'istante t.

Variabili di ingresso
$u(t)$ immigrazione/emigrazione nell'istante t (Hp. solo suscettibili).

Variabili di uscita
$y_k(t)$ malati nell'istante t, costo totale cure, n° nuovi malati,....

$$dx_1(t)/dt = - cx_1(t)x_2(t) + u(t)$$

guarigione

contagio

$$dx_2(t)/dt = - gx_2(t) + cx_1(t)x_2(t)$$

$$y_1(t)= x_2(t)$$

$$y_2(t) = \Sigma_{t_0,t}\ px_2(t)$$

…….

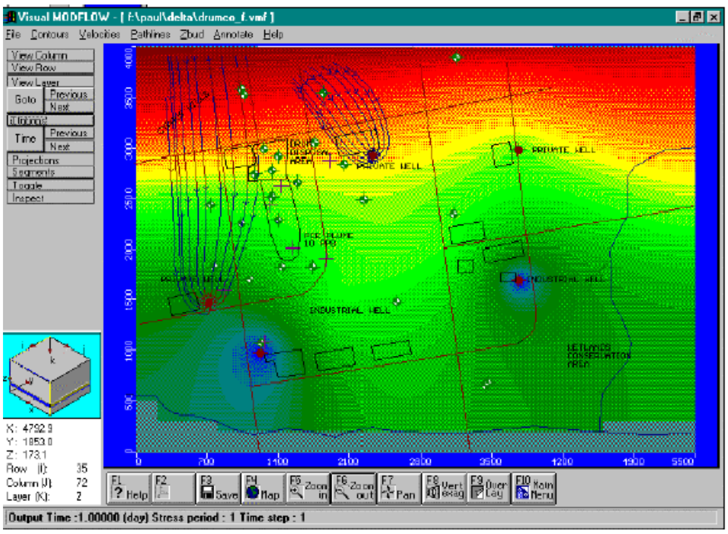
Il tempo avanza con i numeri reali → modello (tempo) continuo
(descritto da un sistema di equazioni differenziali)

Lo stato e le uscite non sono funzioni lineari → modello non lineare

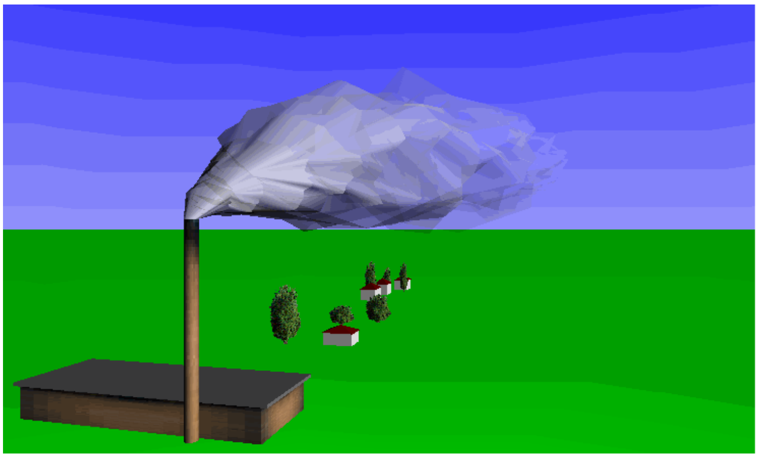
SISTEMI A PARAMETRI DISTRIBUITI

I problemi ambientali sono spesso meglio descritti da sistemi che evolvono nello spazio (mono-, bi-, tri-dimensionale) oltre che nel tempo.

Esempio 1: diffusione dell'inquinamento nelle falde acquifere (spesso assunte piane)



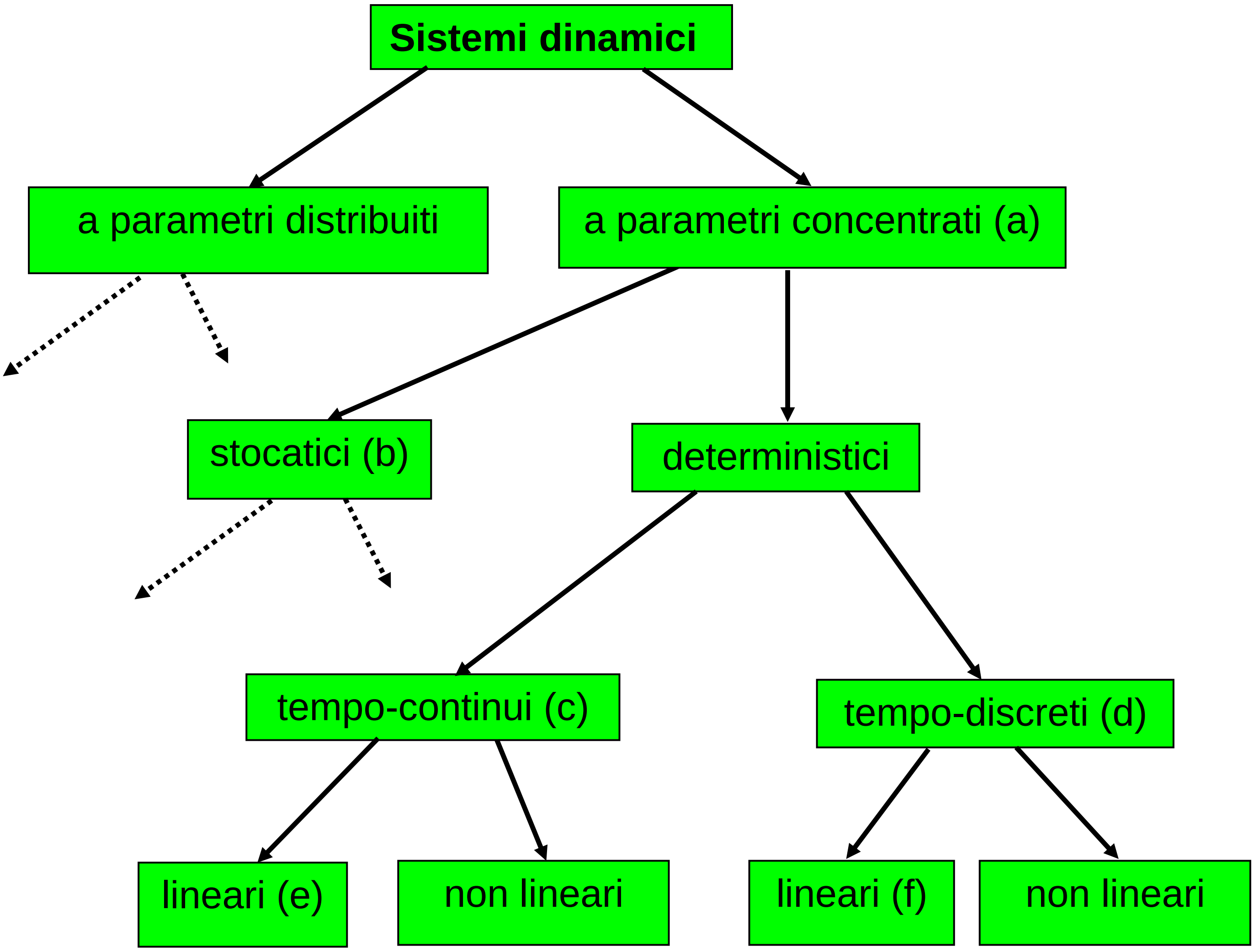
Esempio 2: diffusione dell'inquinamento atmosferico



Il tempo e lo spazio sono variabili indipendenti →

modello descritto da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali.

CLASSIFICAZIONE DEI MODELLI



a) il tempo è l'unica variabile indipendente
b) lo stato e le uscite in ogni istante non dipendono in modo univoco dallo stato e dagli ingressi precedenti
c) il tempo può assumere qualsiasi valore reale (si possono scrivere le derivate delle variabili rispetto al tempo e quindi il modello è scritto in termini di equazioni differenziali)
d) il tempo può assumere solo valori interi (il modello è descritto da un sistema di equazioni algebriche)
e) le derivate delle variabili di stato rispetto al tempo e le uscite sono funzioni lineari (somme pesate) dei valori delle variabili di stato (e degli ingressi).
f) i valori delle variabili di stato in un istante successivo e le uscite sono funzioni lineari (somme pesate) dei valori delle variabili di stato in un istante precedente (e degli ingressi).

FORMALIZZIAMO

modello deterministico

$x(t)=\varphi(x(t_0),u(\cdot)_{[t_0,t)}, t_0, t)$ t_0 t *funz. transizione di stato*

$y(t)=\eta(x(t),u(t),t)$ trasformazione d'uscita

se compare, il modello si dice "improprio"

modello stocastico

$x(t)=\varphi(x(t_0),u(\cdot)_{[t_0,t)}, t_0, t, \varepsilon)$

$y(t)=\eta(x(t),u(t),t, \delta)$ componenti stocastiche

modello tempo-continuo

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x,u,t)$$

funzione generatrice $\neq\varphi$

$$y = g(x,u,t)$$

se compare, il modello si dice "variante" o "non stazionario"

modello tempo-discreto

$$x(t+1) = f(x(t),u(t),t)$$

$$y = g(x,u,t)$$

modello semplice (SISO)

$u(t), y(t)$ sono scalari

modello multiplo (MIMO)

$\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)$ sono vettori

Sono possibili tutte le combinazioni (es. modello stocastico, tempo-discreto, invariante, semplice).

Riassunto puntate precedenti: a) il caso lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \ldots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \ldots + b_{2m}u_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \ldots + b_{nm}u_m \end{cases}$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n \left[+ d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \ldots + d_{1m}u_m \right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_p = c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \ldots + c_{pn}x_n \left[+ d_{p1}u_1 + d_{p2}u_2 + \ldots + d_{pm}u_m \right]$$

in forma matriciale: *continuo* *discreto*

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = Cx\left[+ Du \right] \qquad y(t) = Cx(t)[+Du(t)]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ matrice n x n

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$ matrice n x m ($m = 1 \rightarrow$ vettore colonna)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}$$ matrice p x n ($p = 1 \rightarrow$ vettore riga)

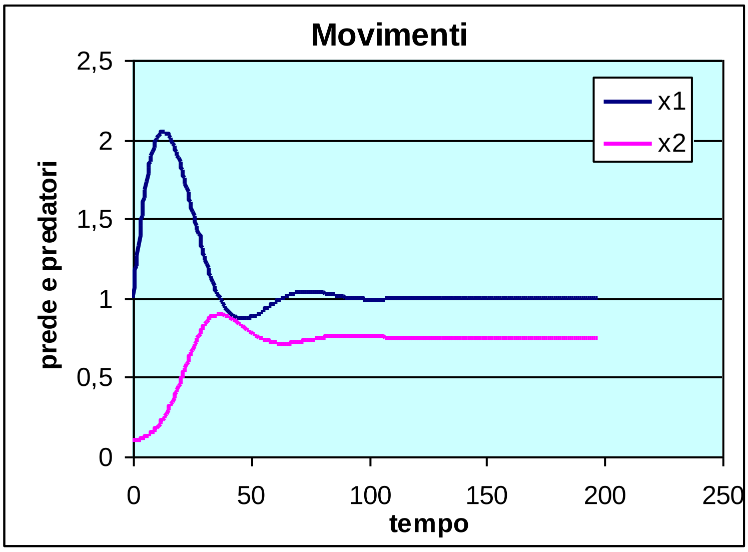
$D =$ matrice p x m (sistema SISO $\rightarrow$ scalare)

b) movimento e traiettoria

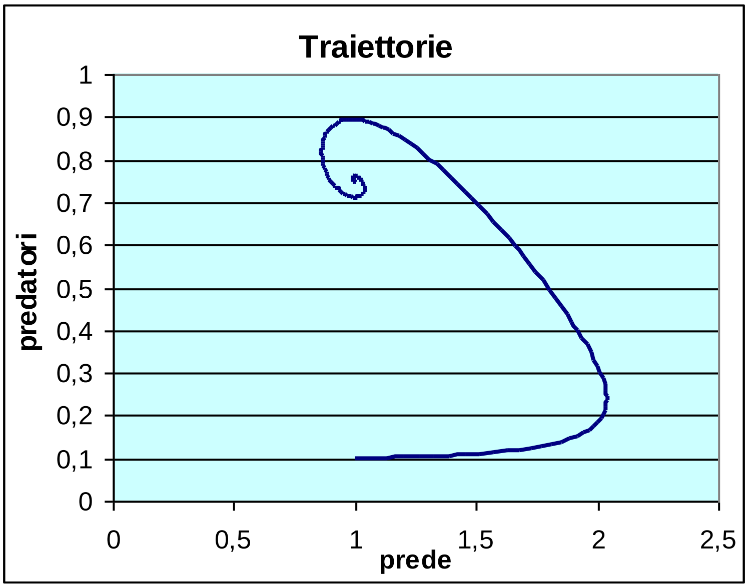
Movimento: andamento delle variabili (di stato, di uscita) nel tempo: $x(t)=\varphi(x(t_0),u(\cdot), t_0,t)$

movimento libero: movimento corrispondente ad ingressi nulli;

movimento forzato: movimento corrispondente a stato iniziale nullo.



Traiettoria: andamento congiunto delle variabili (di stato, di uscita) nello spazio delle variabili stesse: $x_1(t)=h(x_2(t))$.



Ogni punto corrisponde a una coppia $(x_1(t),x_2(t))$ al variare di t, quindi la curva è punteggiata nel tempo.