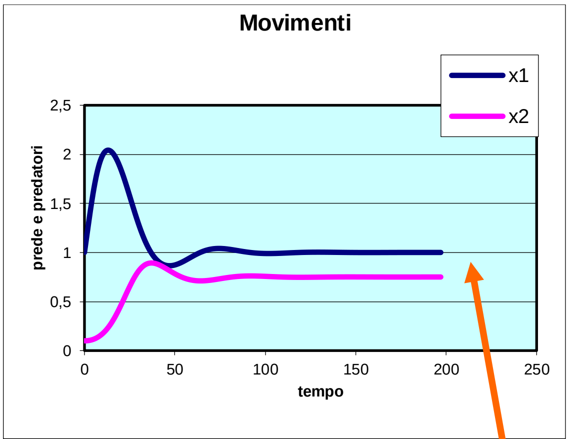
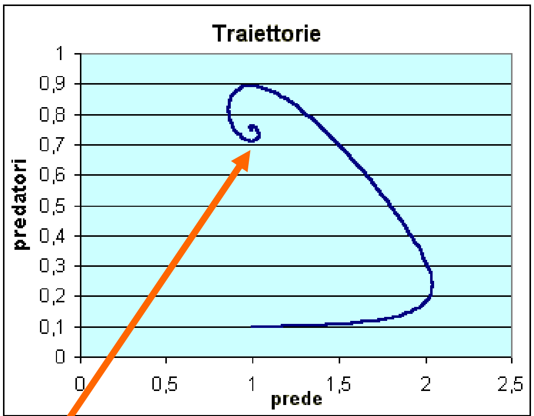
c) equilibrio e stabilità

Equilibrio: il movimento, <u>con ingresso costante</u>, è in grado di rimanere indefinitamente in una certa condizione (= tutte le variabili sono costanti nel tempo = tutte le derivate sono nulle).
Un sistema può avere un numero qualsiasi (anche 0 o infiniti) stati di equilibrio.

Stabilità: il movimento, anche se sottoposto a disturbi dello stato iniziale, tende a ritornare nelle condizioni di partenza (è una proprietà *locale* di alcuni movimenti, es. certi stati di equilibrio).





Equilibrio stabile per u=0 (le variabili sono costanti, eventuali piccole variazioni sono attenuate)

d) determinazione degli equilibri

Hp. $u(\cdot) = \underline{u}$, costante; x,y,u vettori

sistema continuo

$$\dot{x} = 0 = f(\underline{x},\underline{u}) \qquad \underline{y} = g(\underline{x})$$

sistema discreto

$$x(t+1) = x(t) = \underline{x} = f(\underline{x},\underline{u}) \quad \underline{y} = g(\underline{x})$$

In entrambi i casi devo risolvere un sistema di eq. algebriche non lineari: in generale, 0, 1, 2, …, ∞ soluzioni.

sistema lineare continuo

$$\dot{x} = 0 = A\underline{x} + B\underline{u} \qquad \underline{y} = C\underline{x}$$

sistema lineare discreto

$$x(t+1) = x(t) = \underline{x} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad \underline{y} = g(\underline{x})$$

In entrambi i casi devo risolvere un sistema di eq. algebriche lineari: 0, 1, ∞ soluzioni.

ATTENZIONE: le eventuali soluzioni complesse non vanno considerate (non sono stati di un sistema dinamico)

Nel caso generale (non lineare), devo risolvere un sistema di equazioni algebriche che possiamo riscrivere come:

$F(\underline{x},\underline{u})=0$ cioè $\underline{F}(\underline{x})=0$ ($\underline{u}$ è un vettore di costanti note)

Nel caso lineare, devo risolvere un sistema algebrico che possiamo riscrivere come:

$H\underline{x}=k$ (tutti i coefficienti della matrice H e del vettore k sono noti).

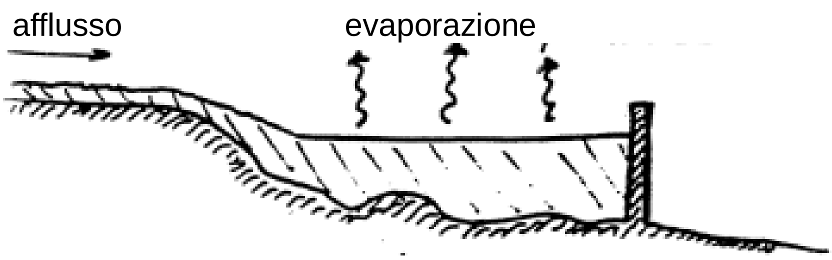
Sono in ogni caso necessari dei metodi numerici di soluzione (si risolvono con il calcolatore).

Esaminiamo due metodi: uno "esatto" (Gauss) e uno "iterativo" (Saidel).

ESEMPIO: Equilibrio di un sistema stocastico

Immaginiamo un bacino artificiale formatosi per la costruzione di una diga. L'afflusso e l'evaporazione sono fenomeni stocastici (dipendono dalla meteorologia). Anche fissando lo stato iniziale del serbatoio x(0) e le modalità di gestione della diga (ingresso u(·)) non si può calcolare univocamente lo stato agli istanti successivi.

Si tratta quindi di un ***sistema stocastico***.



Costruiamo il modello nel modo seguente.

Immaginiamo che siano possibili 3 (in generale, *n*) situazioni:

- Lago vuoto (o nel quarto inferiore dell'invaso)
- Lago né pieno, né vuoto (più di un quarto e meno di tre quarti)
- Lago pieno (più di tre quarti della capacità)

Definiamo:

$\pi_i(t)$ la probabilità che il lago si trovi nello stato i all'istante t (è lo stato del sistema)

p_{ij} la probabilità di passare dallo stato i allo stato j in una unità di tempo (è un parametro del sistema, deducibile dalla storia passata)

Allora:

$\pi_j(t+1) = p_{1j}\,\pi_1(t) + p_{2j}\,\pi_2(t) + p_{3j}\,\pi_3(t)$ è la transizione di stato

quindi le probabilità evolvono come un sistema deterministico, lineare, senza ingressi.

Il vettore di stato è quindi $\pi(t+1) = | \pi_1(t) \;\; \pi_2(t) \;\; \pi_3(t) |^T$

e la matrice della dinamica P = $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$

Il sistema $\pi(t+1) = P^T \pi(t)$ è detto CATENA DI MARKOV

Si noti che, essendo in ogni riga di P tutte le probabilità di transizione, ogni riga della matrice ha somma 1. Se poi tutte le probabilità di transizione sono zero, tranne una (che è ovviamente pari a 1), il sistema è detto “automa” (es. calcolatore).

Calcolo dell’equilibrio

Occorre ovviamente porre

$\pi(t+1) = \pi(t) = \underline{\pi}$ costante, cioè $(I-P^T)\underline{\pi} = 0$

Devo quindi, come sempre, risolvere un sistema di *n* equazioni lineari in *n* incognite (la distribuzione di probabilità di equilibrio).

In realtà una di queste equazioni è ridondante e va sostituita con la

$$\underline{\pi_1} + \underline{\pi_2} + \underline{\pi_3} + \ldots + \underline{\pi_n} = 1$$

Estensione:

Le probabilità di transizione p_{ij} possono dipendere da degli ingressi (decisioni) *u* (es. modalità di regolazione della diga), quindi P(*u*) e $\pi(t+1) = P^T(u)\, \pi(t)$. Naturalmente può esistere l’equilibrio (distribuzione di probabilità) solo se l’ingresso *u* è costante.

Calcolo dell'equilibrio dei sistemi lineari (1)

All'equilibrio, $u(\cdot) \equiv \underline{u} = \text{cost.}$ e $x(\cdot) \equiv \underline{x} = \text{cost.}$
Quindi $A\underline{x} = -B\underline{u}$ (continuo) oppure $(I\text{-}A)\underline{x} = B\underline{u}$ (discreto). dove $\underline{x}$ è il vettore delle incognite, mentre $\underline{u}$ è un vettore noto.
In ogni caso, il problema da risolvere potrà essere scritto:

$$\text{H}x = \text{k} \quad \text{cioè} \quad \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\dots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{array}$$

<u>Metodo di Gauss</u> ("esatto" = si sa quante operazioni esegue)

$$\frac{1^a \text{ equazione}}{a_{11}}$$

- $\cdot\, a_{21}$ e sottraiamo alla 2^a equazione
- $\cdot\, a_{31}$ e sottraiamo alla 3^a equazione
- ….
- $\cdot\, a_{n1}$ e sottraiamo alla n-esima equazione

In questo modo viene eliminata la prima variabile da tutte le altre equazioni e quindi si ottiene il sistema:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +a_{12}^*x_2 & +\dots & +a_{1n}^*x_n & =b_1^* \\ & a_{22}^*x_2 & +\dots & +a_{n2}^*x_n & =b_2^* \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{n2}^*x_2 & +\dots & +a_{nn}^*x_n & =b_n^* \end{array}$$

è un sistema uguale al precedente, ma con n-1 equazioni e n-1 incognite

Il procedimento viene quindi iterato fino a "triangolarizzare" la matrice

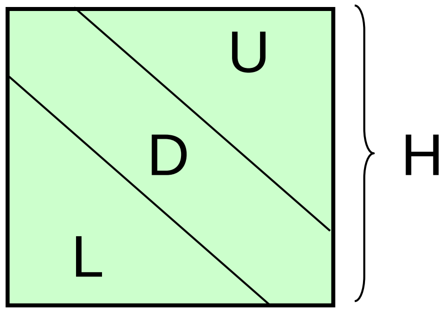
$$\text{U}x = \text{c} \quad \text{con} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Si ricava poi x partendo dall'ultima equazione e risalendo.

Calcolo dell'equilibrio dei sistemi lineari (2)

Metodo di Seidel ("iterativo" = la soluzione viene approssimata sempre meglio a ogni iterazione, necessita di un criterio di stop)

$Hx = k$ con $H = L + D + U$



Se $\underline{x}$ è soluzione, possiamo scrivere

$$(L + D)\underline{x} + U\underline{x} = k$$

e, iterativamente,

$$(L + D)x^{(k+1)} = - Ux^{(k)} + k$$

cioè

$$x^{(k+1)}= -(L + D)^{-1}Ux^{(k)} + (L + D)^{-1}k$$

che, a sua volta, è un sistema dinamico lineare discreto del tipo

$$x^{(k+1)}= Ax^{(k)} + u$$

con $A = -(L + D)^{-1}U$ e $u= (L + D)^{-1}k.$

Tale sistema converge al proprio equilibrio $\underline{x}$, che è la soluzione del problema, sotto opportune condizioni di stabilità della matrice A (che vedremo più avanti).

Di solito, il metodo di Seidel è più efficiente di quello di Gauss.

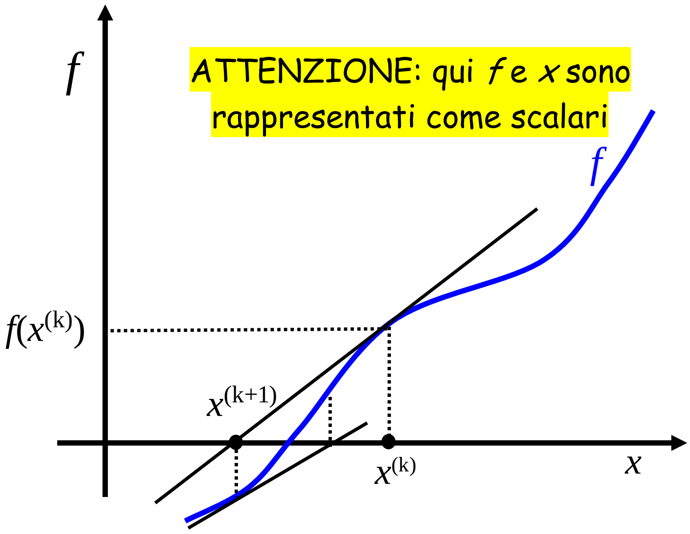
Calcolo dell'equilibrio: caso generale

$f(\underline{x}) = 0$ *n* equazioni non lineari nelle *n* componenti di $\underline{x}$ ($\underline{u}$ è noto)

<u>Metodo di Newton-Raphson</u> (iterativo)

Il metodo deve essere inizializzato con una soluzione di partenza (più vicina possibile a quella incognita), poi opera in 2 passi:

- il sistema è approssimato con un sistema lineare nell'intorno alla soluzione corrente
- il sistema lineare è risolto con uno dei metodi relativi e si determina così la nuova soluzione corrente.



Si approssima f con lo sviluppo in serie troncato:

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x^{(k)}} (x^{(k+1)} - x^{(k)}),$$

si impone $f(x^{(k+1)}) = 0$ per determinare $x^{(k+1)}$. Si ottiene così

$$\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x^{(k)}}}_{\text{matrice nota (Jacobiano)}} \underbrace{x^{(k+1)}}_{\text{vettore incognito}} = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x^{(k)}} x^{(k)} - f(x^{(k)})}_{\text{vettore noto}}$$

Quindi, ad ogni iterazione, dobbiamo ancora risolvere un problema del tipo Hx = k.