PROBLEMI A MOLTI DECISORI

Decisore 1	Decisore 2	
u_1	u_2	variab. di decisione
$\max [J_1]$	$\max [J_2]$	obiettivo

Nel caso gli obiettivi dipendano dalle decisioni di entrambi

$$J_1 = J_1(u_1, u_2) \qquad J_2 = J_2(u_1, u_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{u_1} [J_1(u_1, u_2)] \\ \max\limits_{u_2} [J_2(u_1, u_2)] \end{array}\right\}$$

Problemi di questo tipo si dicono di TEORIA DEI GIOCHI

La “soluzione” di un problema di questo tipo è chiamata

EQUILIBRIO DI NASH

E’ una situazione nella quale nessuno dei due decisori ha interesse a variare <u>per primo</u> la propria decisione.

NOTA: in caso di variazione <u>congiunta</u> potrebbero esserci soluzioni migliori.

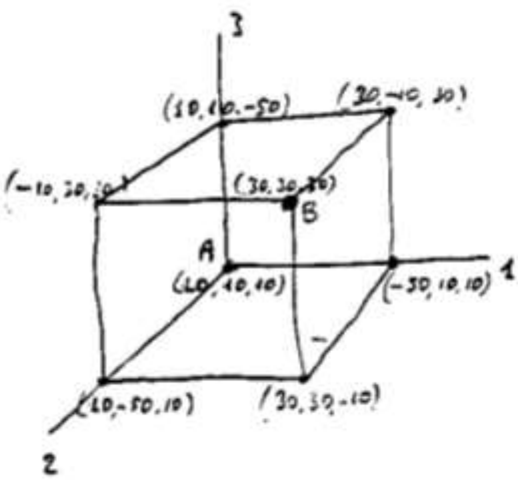
Formalmente, un equilibrio di Nash è una coppia (u_1*, u_2*) tale che:

$$J_1(u_1, u_2^*) \leq J_1(u_1^*, u_2^*)$$
$$J_2(u_1^*, u_2) \leq J_2(u_1^*, u_2^*)$$

Esempio

Supponiamo di avere 3 giocatori (es. 3 comuni che fanno parte di un parco) che devono prendere una decisione binaria sì-no (0,1) (es. valorizzare o meno la loro parte di parco). I loro obiettivi J_1, J_2, J_3, da massimizzare (es. ricavi del turismo), sono riportati nella tabella seguente e possono essere visualizzati sui vertici di un cubo.

1	2	3	J_1	J_2	J_3
0	0	0	10	10	10
0	0	1	10	10	-50
0	1	0	10	-50	10
0	1	1	-10	30	30
1	0	0	-50	10	10
1	0	1	30	-10	30
1	1	0	30	30	-10
1	1	1	30	30	30



Se gli altri comuni non procedono anch’essi, il turismo non aumenta e ci sono solo spese. Se invece procedono, il turismo rende. Quindi:

Nessuno si sposta per primo dal vertice A

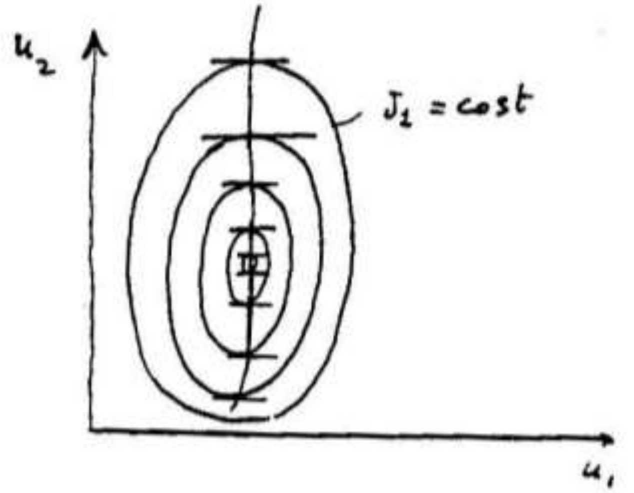
Nessuno si sposta per primo dal vertice B

Esistono quindi 2 equilibri di Nash:

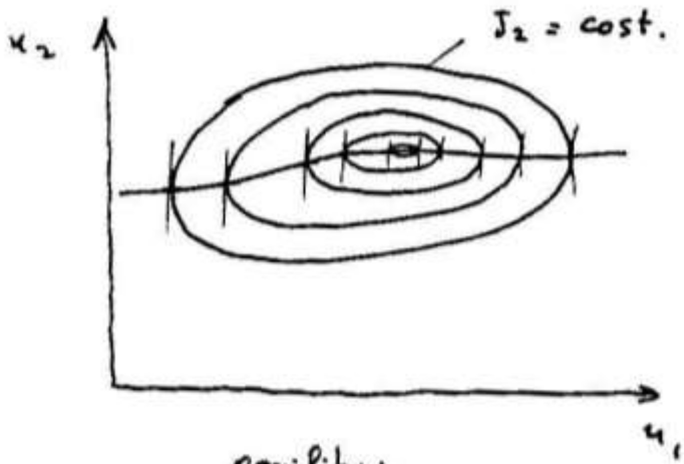
- (10,10,10) corrispondente alle decisioni (0,0,0)
- (30,30,30) corrispondente alle decisioni (1,1,1)

Ovviamente, B domina A in senso paretiano (è meglio per tutti).

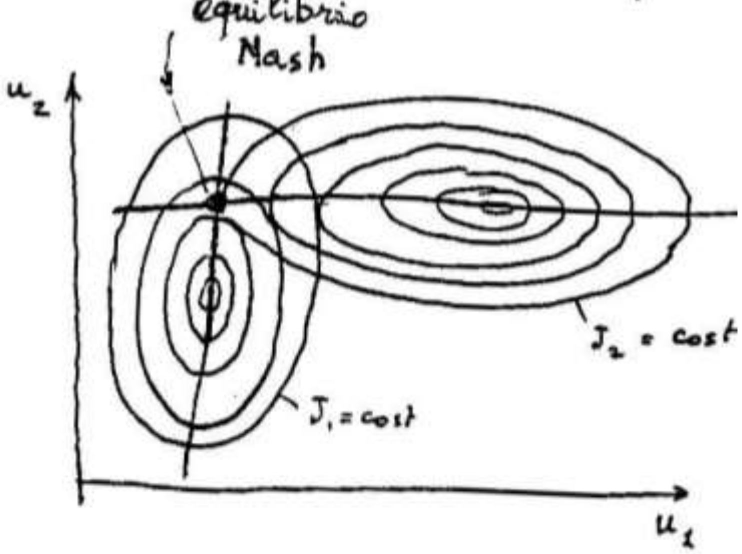
Il caso di variabili continue



Per ogni fissato valore di u_2, il primo decisore ottimizza il proprio obiettivo J_1, rispetto alla propria variabile di decisione u_1. Queste soluzioni determinano una linea nel piano (u_1,u_2).



Per ogni fissato valore di u_1, il secondo decisore ottimizza la propria decisone u_2.



L’intersezione delle due curve precedenti costituisce l’<u>equilibrio di Nash</u>.

Esempio: I gamberoni del golfo di Maracaibo

Le flotte di pescherecci di Maracaibo e Punto Fijo in Venezuela pescano gli stessi gamberoni nel cosiddetto "lago di Maracaibo".

Ciascuna deve decidere la dimensione (sforzo) della propria flotta u_M e u_P per massimizzare il proprio beneficio J_M e J_P. Gli sforzi non possono ovviamente superare certi valori massimi, quindi $0 \le u_M \le U_M$ e $0 \le u_P \le U_P$.

Lo stock di gamberoni $x(t)$ è rinnovato ogni anno dallo scambio con l'oceano e può quindi essere assunto costante.

I benefici della pesca si possono scrivere come:

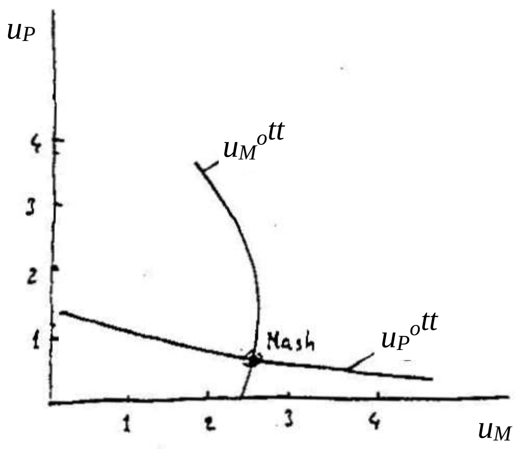
Quantità pescata

$$J_M(t) = p_M x \frac{u_M}{u_M + u_P}(1 - e^{-q(u_M+u_P)}) - r_M u_M$$

Valore del pescato

Costo dello sforzo

$$J_P(t) = p_P x \frac{u_P}{u_M + u_P}(1 - e^{-q(u_M+u_P)}) - r_P u_P$$



Per p_M=6, p_P=4, r_M=0,5, r_P=1, q=1 si ottiene la situazione in figura dove le curve u_i^{ott} sono ottenute massimizzando J_i a u_j costante.

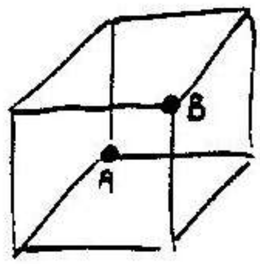
C'è un solo equilibrio di Nash, nel quale la flotta M esercita uno sforzo maggiore perché ha benefici maggiori e costi minori.

Competitività ed efficienza

Quasi sempre gli equilibri competitivi (cioè quelli di Nash, in cui ogni giocatore decide individualmente) non sono efficienti, nel senso che esistono altre soluzioni che rappresentano un miglioramento della somma delle diverse funzioni obiettivo o addirittura di ciascuno degli obiettivi presi singolarmente (cioè gli equilibri di Nash sono dominati in senso paretiano).

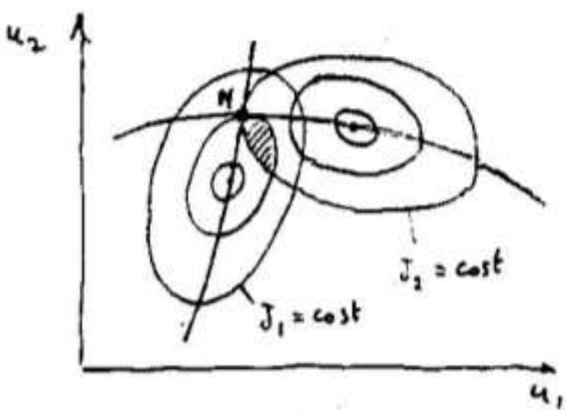
Esempio 1

Nel problema precedente dei 3 giocatori, si vede immediatamente che l'equilibrio A, che dà un guadagno pari a 10 a ogni giocatore, è dominato dall'equilibrio B, che dà 30 a ciascuno.



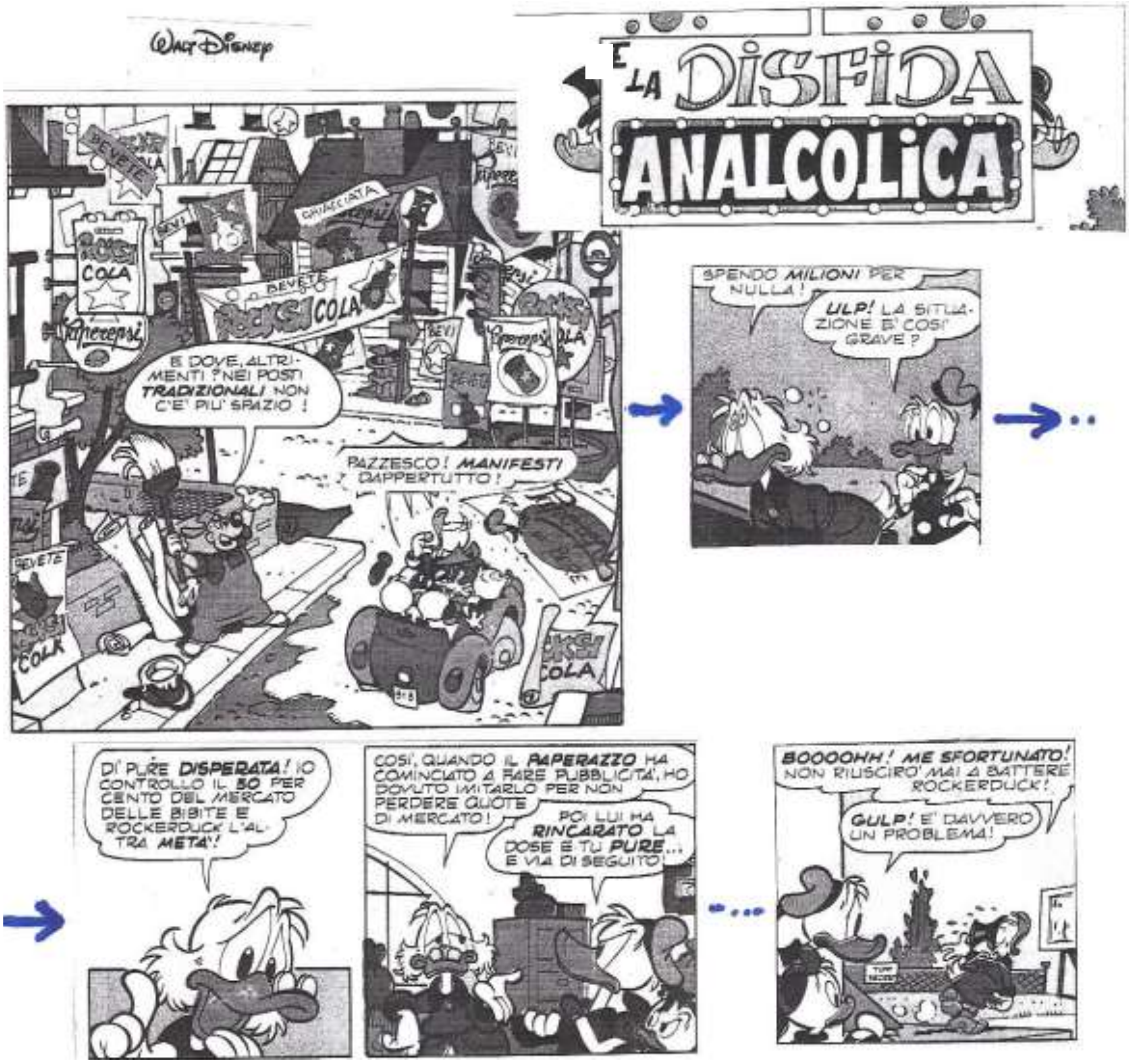
Esempio 2

Nel caso delle decisioni continue, tutte le soluzioni della zona tratteggiata implicano valori di J_1 e J_2 migliori di quelli corrispondenti all'equilibrio di Nash.



Esempio 3

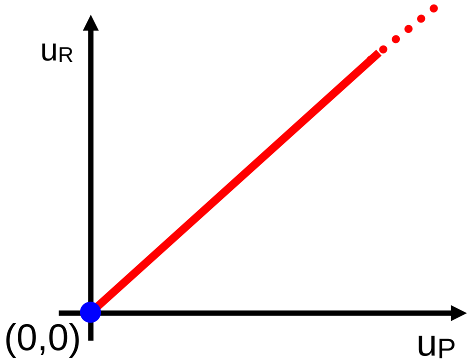
Le immagini seguenti sono tratte da “Topolino” n. 1643 (1987) e rappresentano sinteticamente una “battaglia commerciale” tra Paperon de’ Paperoni e Rockerduck.



Ognuno dei due giocatori deve minimizzare le proprie perdite J_i.
Se u_P è l’investimento pubblicitario di PdP e u_R del suo concorrente, possiamo immaginare che la funzione J_P sia uguale a u_P se $u_P \geq u_R$ e molto elevata (uscita dal mercato) in caso contrario. Per u_R e J_R valgono analoghe considerazioni.

Per ogni fissato $\underline{u_R}$, $u_P°$ sarà dunque $u_P° = \underline{u_R}$ e analogamente $u_R° = \underline{u_P}$.

Esistono quindi infiniti equilibri di Nash (sulla bisettrice), tutti dominati dall’equilibrio cooperativo in (0,0).



DECISIONI IN AMBIENTE INCERTO

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{z}\left[J(z,\omega)\right] \\ z\in Z \quad \omega\in\Omega\end{array}\right\}$$

z è il vettore delle decisioni

ω è il vettore di variabili incerte

z \ ω	1	2	3
a	15	17	18
b	35	20	30
c	-5	25	45

Esempio 1 (caso discreto)

Le decisioni possibili sono tre (a, b, c)

I possibili valori di ω sono tre (1, 2, 3)

La tabella rappresenta dei costi da minimizzare.

Se non si hanno informazioni sulle probabilità che ω=1, ω=2, ω=3 si può scegliere in uno dei modi seguenti:

a) A caso (si sorteggia tra a, b, c)

b) Con prudenza: si sceglie a perché questa decisione ottimizza il caso peggiore:

$$\begin{pmatrix}\max\limits_{\omega} J(a,\omega) < \max\limits_{\omega} J(b,\omega) \\ \max\limits_{\omega} J(a,\omega) < \max\limits_{\omega} J(c,\omega)\end{pmatrix}$$

c) Con fiducia: si sceglie c perché solo così si può ottenere il minimo assoluto di J.

Il secondo criterio (quello della prudenza) è molto usato ed è anche noto come criterio del min-max , perché:

$$\min_{z}\left[\max_{\omega} J(z,\omega)\right]$$