PROBLEMI A MOLTI OBIETTIVI

Spesso gli obiettivi di pianificazione e/o gestione sono numerosi e difficilmente paragonabili (incommensurabilità).

Esempio 1

Risanamento di una zona fortemente inquinata

n proposte di intervento

m obiettivi	min [costo]	
	min [tempo]	Come
	min [rischio]	
	min [impopolarità]	

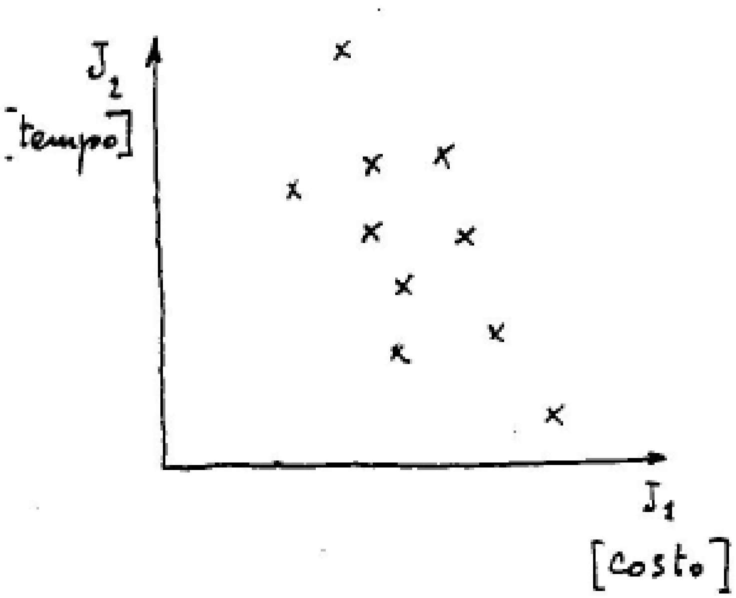
Esempio 2

Gestione delle acque di un lago

∞ possibili proposte (regole operative)

3 obiettivi	min [piene sul lago]
	min [deficit idroelettrici]
	min [deficit agricoli]

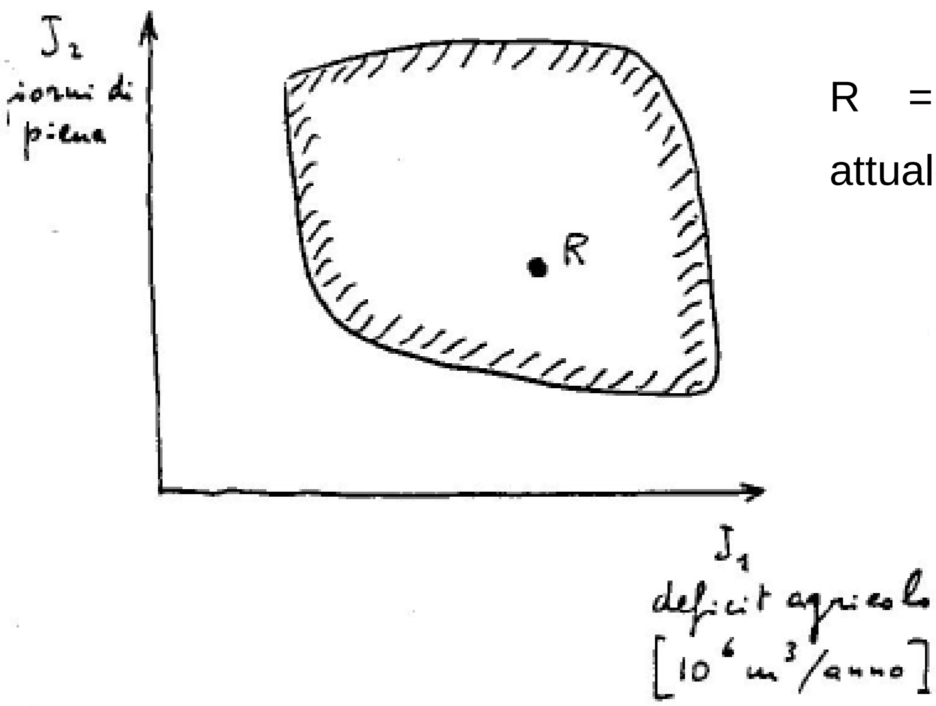
Visualizzazione nello spazio degli obiettivi



N progetti

Quale scegliere?

E' il caso più comune quando ad esempio si esaminano le risposte ad un bando pubblico.



R = soluzione attuale

Criterio lessicografico

L'obiettivo i è infinitamente più importante dell'obiettivo i+1

$$\left.\begin{array}{l} \min J_1(z) \\ z \in Z \end{array}\right\} Z_1 = \text{ insieme soluzioni ottime}$$

Se Z_1 è costituito da un solo vettore di decisioni ci si ferma, altrimenti

$$\left.\begin{array}{l} \min J_2(z) \\ z \in Z_1 \end{array}\right\} Z_2$$

E così si procede eventualmente fino a J_p

Esempio

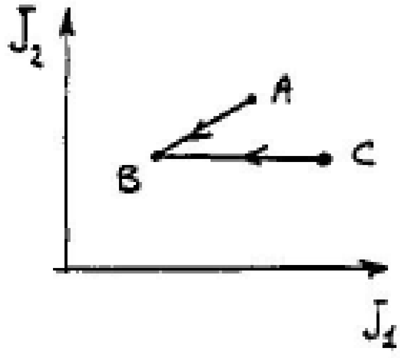
Stima parametrica di un modello BOD – DO per la descrizione della qualità delle acque di un fiume. E' possibile procedere con

J_1 = errore di stima del BOD

J_2 = errore di stima del DO

Stimando quindi il solo parametro di degradazione del BOD e, fissato questo, stimare gli altri parametri.

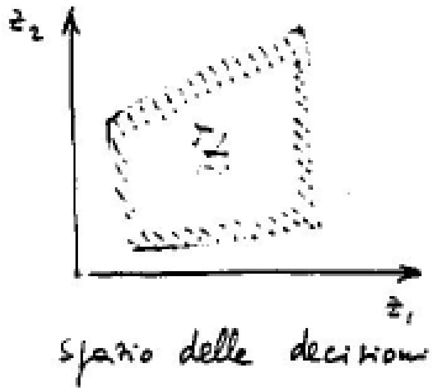
Efficienza (Pareto ottimalità)

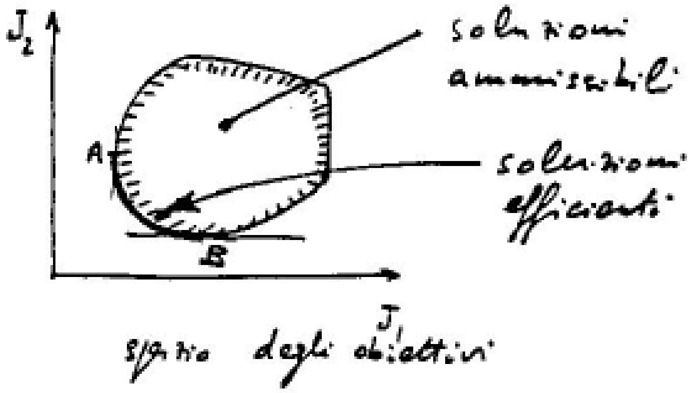


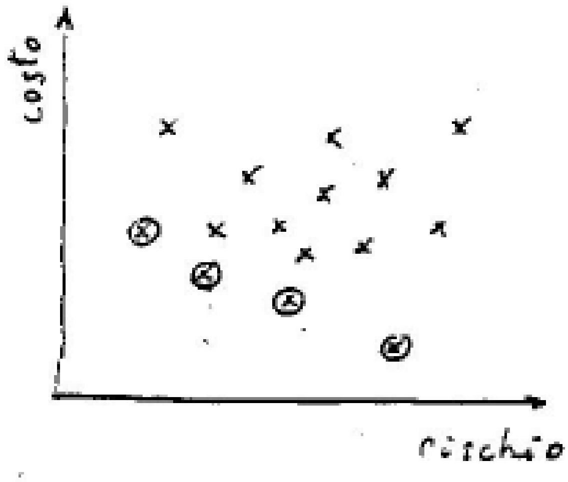
A è dominato da B perché $J_1(B) < J_1(A)$ e $J_2(B) < J_2(A)$.

Definizione (dovuta a Pareto)

Una soluzione z* di un problema a molti obiettivi è efficiente quando non è dominata da nessun’altra soluzione.







Scelta tra n progetti

I progetti efficienti sono solo 4 nel caso in figura.

Come si procede in pratica

- Determinazione delle soluzioni efficienti
- Scelta del miglior compromesso (tra le soluzioni efficienti) N.B. è sostanzialmente una scelta "politica".

Spesso la seconda fase è risolta in modo non "scientifico" lasciando spazio a fattori politico – sociali.

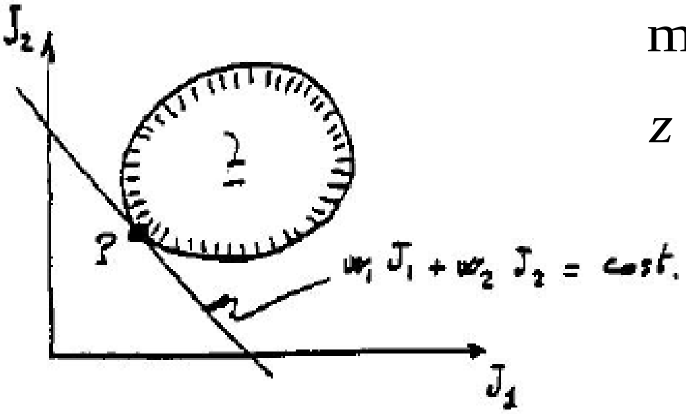
Descriveremo due metodi per la determinazione delle soluzioni efficienti; metodo dei pesi e metodo dei vincoli.

Descriveremo i criteri più usati (massima curvatura, utopia, pesi di influenza, curve di indifferenza) per la scelta del miglior compromesso.

Esistono delle tecniche di calcolo della soluzione ottima che non scompongono il problema in due fasi. Per usare queste tecniche è necessario che il decisore finale si lasci coinvolgere, e sappia fornire al tecnico indicazioni precise sulle sue preferenze (es. la cosiddetta *Pareto race*).

Determinazione soluzioni efficienti

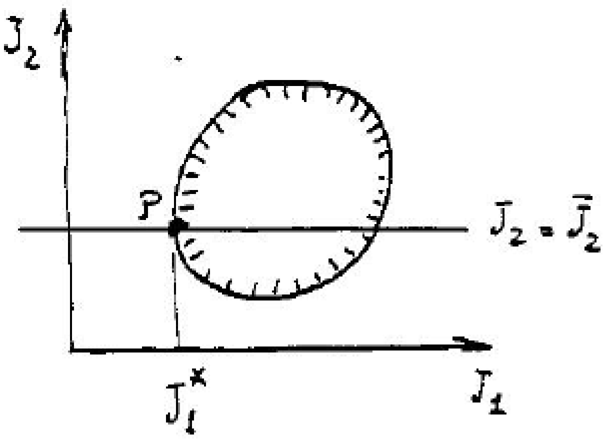
Metodo dei pesi



$$\min\left[w_1 J_1 + w_2 J_2 + \ldots + w_P J_P\right]$$
$$z \in Z \qquad \sum_i w_i = 1 \qquad w_i \geq 0$$

Fissata la coppia (w_1, w_2) resta fissata la pendenza della retta $w_1J_1 + w_2J_2 = cost$ che determina il punto P. Al variare dei pesi w_i si individuano tutte le soluzioni efficienti (se Z è convesso).

Metodo dei vincoli



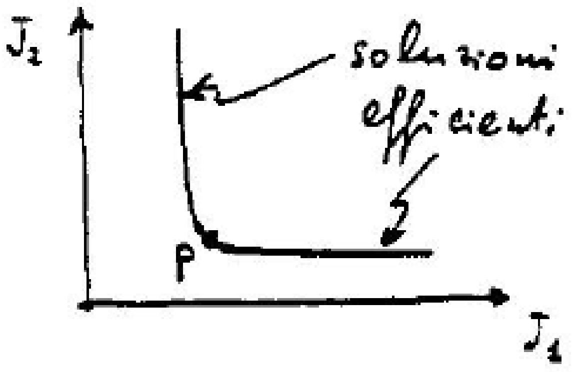
Vincolato l'obiettivo J_2 al valore $\bar{J}_2$, si risolve il seguente problema di programmazione matematica:

$$\left.\begin{array}{l}\min\left[J_1\right] \\ z \in Z \quad J_2(z) \leq \bar{J}_2\end{array}\right\} J_1^* \quad \text{(punto P)}$$

Al variare del "parametro" $\bar{J}_2$ si determina così l'insieme delle soluzioni efficienti.

Scelta del miglior compromesso (1)

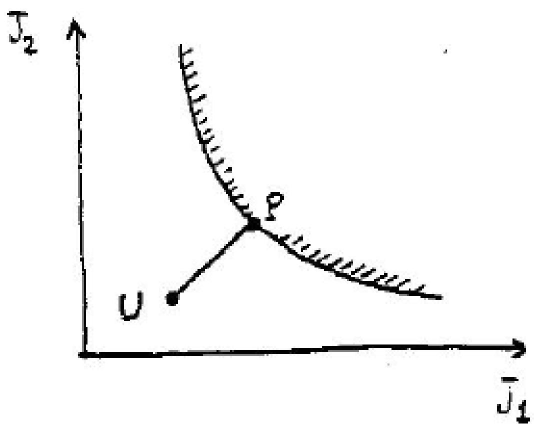
Criterio della massima curvatura)



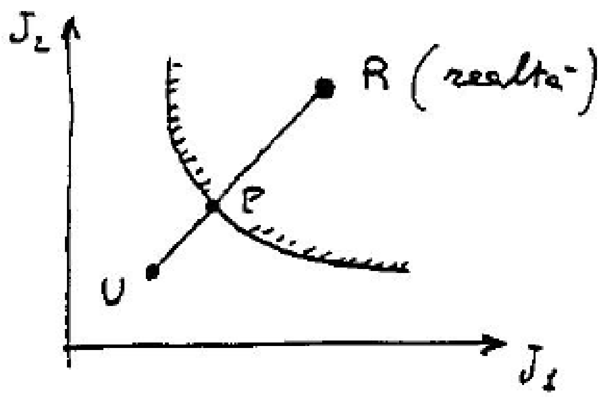
Nel punto P la curvatura è massima. Spostarsi troppo da P non è conveniente perché per migliorare di poco un obiettivo bisogna peggiorare di molto l'altro.

Criterio dell'utopia

L'utopia U è il punto dello spazio degli obiettivi che rappresenta i **minimi assoluti (e indipendenti) degli obiettivi**: perciò l'utopia non è realizzabile.



Si sceglie il punto P perché è il più "vicino" a U.

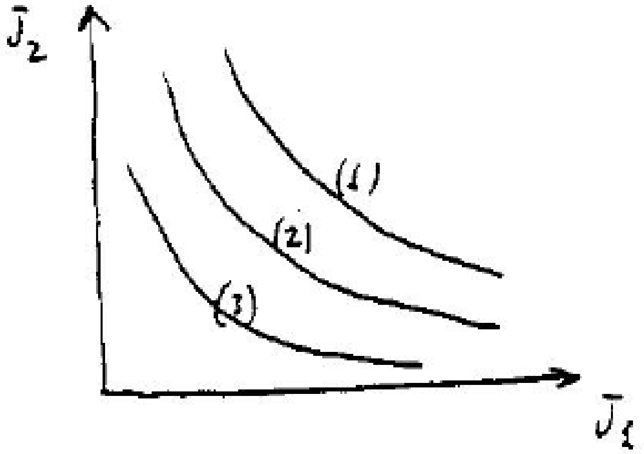


Si sceglie il punto P perché è sulla retta UR. R indica la realtà (non efficiente)

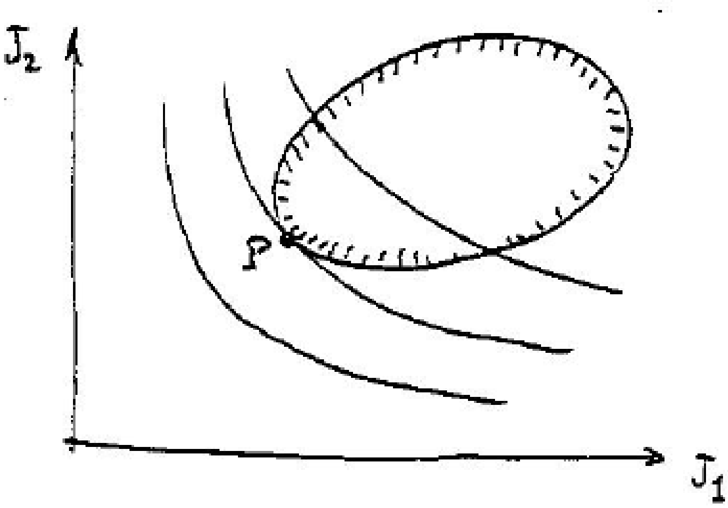
Scelta del miglior compromesso (2)

La scelta del miglior compromesso tra le soluzioni efficienti dovrebbe in realtà rispecchiare i meccanismi di preferenza dei gruppi coinvolti o responsabili. Per questo sono state sviluppate delle tecniche (basate su test e inchieste) che permettono di ricavare le cosiddette:

Curve di indifferenza



I punti che stanno su una stessa curva rappresentano soluzioni tra cui i decisori non sanno scegliere.



La soluzione prescelta P è quindi tale che la curva di indifferenza è tangente all'insieme delle soluzioni efficienti.

Scelta del miglior compromesso (3)

Se le curve di indifferenza vengono usate per definire una funzione di utilità $u(J_1\ J_2)$ che è costante (appunto) lungo le curve di indifferenza ed è decrescente con J_i , il problema della scelta del compromesso migliore può essere formulato come problema di programmazione matematica:

$$\max\left[u(J_1\ J_2)\right]$$
$$(J_1\ J_2) \in J^* = \text{ insieme sol. efficienti}$$

Ma nel caso sia effettivamente disponibile la funzione di utilità u(J) l'intero problema può essere risolto come problema di programmazione matematica:

$$\max\left[u(J_1(\mathrm{z}), J_2(z),..., J_P(z))\right]$$
$$z \in Z$$

Un caso particolarmente importante (perché spesso seguito) è il seguente:

(criterio dei pesi) $$u = -\sum_i w_i^* J_i$$

MOLTIOBIETTIVI – CASO DI STUDIO

Pianificazione agricola est Delta e Sinai

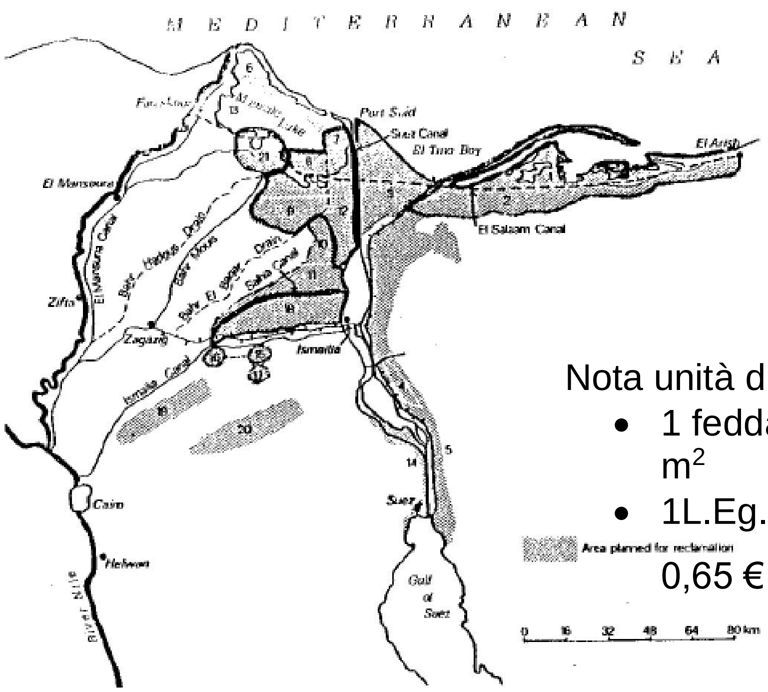
In collaborazione con: Accademia delle Ricerche, Cairo
Ministero dell'Agricoltura, Cairo

Vedi: Guariso, Whittington,Shindi Zikri, Hosni Mancy; **Nile water for Sinai: Framework for analysis;** *Water Resources Research*, 17, 1585-1593, 1981

Area interessata: ≈ 7500 km^2 (tot. A.R.E. ≈ 29000 km^2)
Orizzonte di pianificazione: 20 anni

Risorse disponibili - 6.72 * 10^9 m^3/anno di acqua dal Nilo
1. Lavoro (illimitato)
2. Fertilizzanti (illimitati)

Obiettivi: **1) economico**
2) politico



Nota unità di misura (1980):

- 1 feddan = 4212 m^2
- 1L.Eg. ≈ 1250 Lit ≈ 0,65 €

TABLE 1: Official Plan for Land Reclamation in the Eastern Delta and Sinai

SITE NOTATION	SOURCE OF IRRIGATION	TYPE OF WATER	METHOD OF IRRIGATION
1	Salam Canal	Mixed	Surface
2	Salhia Canal	Fresh river water	Sprinkler
3	Salam Canal	Mixed	Surface
4	Suez irr. Canal	Fresh river water	Sprinkler
5	Suez irr. Canal	Fresh river water	Sprinkler
6	Damietta Branch	Fresh river water	Sprinkler
7	Salam Canal	Mixed	Surface
8	Salam Canal	Mixed	Surface
9	Salam Canal	Mixed	Surface
10	Salhia Canal	Fresh river water	Surface
11	Salhia Canal	" " "	Surface
12	Pt. Said Canal	" " "	Surface
13	Damietta Branch	" " "	Surface
14	Suez irr. Canal	" " "	Surface
15	Ismailia Canal	" " "	Sprinkler
16	Ismailia Canal	" " "	Sprinkler
17	Ismailia Canal	" " "	Sprinkler
18	Salhia Canal	" " "	Sprinkler
19	Ismailia Canal	" " "	Sprinkler
20	Cairo	Sewage effluent	Surface
21	Damietta Branch	Fresh river water	Surface

Piano di bonifica da attuare predisposto dal Ministero dell’Irrigazione (1977).

FORMALIZZAZIONE OBIETTIVI

1. Economico

Max (BENEFICIO NETTO ANNUO)

→ Max (Benefici netti agricoli +
- Costi impianto irrigazione - Costi trasporto acqua
- costi opportunità acqua)

2. Politico

Max (area coltivata (possibilmente con una certa uniformità))

→ Max (minima frazione di area coltivata tra tutte le regioni)

VARIABILI DI DECISIONE

X_{ijk} = area da destinare al raccolto i nella regione j con il metodo di irrigazione k

Y_{sj} = quantità di acqua trasportata annualmente dalla sorgente s alla regione j

COEFFICIENTI

- Costi
    - Di trasporto (c)
    - Del sistema di irrigazione (L_K)
    - Opportunità (w_i)

- Perdite nei canali (e)

- Acqua necessaria per ogni raccolto e sistema di irrigazione (R_{ik})

- Area disponibile (A_j)

- Volume annuo di acqua disponibile (V_s)

Obiettivo Economico

$$\max_{\left[X_{ilk}, Y_{sj}\right]}\left[\sum_i \sum_j \sum_k P_i(Q_j) X_{ijk} - L_k X_{ijk} - \sum_s Y_{sj}\left(C(Y_{sj}) + W_s\right)\right]$$

$$C(Y_{sj}) = c \cdot dist_{sj} \cdot Y_{sj} = C_{sj} Y_{sj}$$

$$E(Y_{sj}) = e \cdot dist_{sj} \cdot Y_{sj} = \varepsilon_{sj} Y_{sj}$$

$$s, i, j, k \in \mathrm{F}$$

$$Q_j = \frac{\sum_s \left(Y_{sj} - E(Y_{sj})\right) Q_s}{\sum_s \left(Y_{sj} - E(Y_{sj})\right)}$$

Obiettivo Politico

$$\max_{\left[X_{ilk}, Y_{sj}\right]} \alpha$$

$$\alpha \le \frac{\sum_i \sum_k X_{ijk}}{A_j} \quad \forall j$$

VINCOLI

1) L’acqua fornita soddisfa le richieste

$$\sum_s \left(Y_{sj} - \varepsilon_{sj} Y_{sj} \right) \geq \sum_i \sum_k R_{ik} X_{ijk} \qquad \forall j$$

2) La disponibilità alle sorgenti è limitata

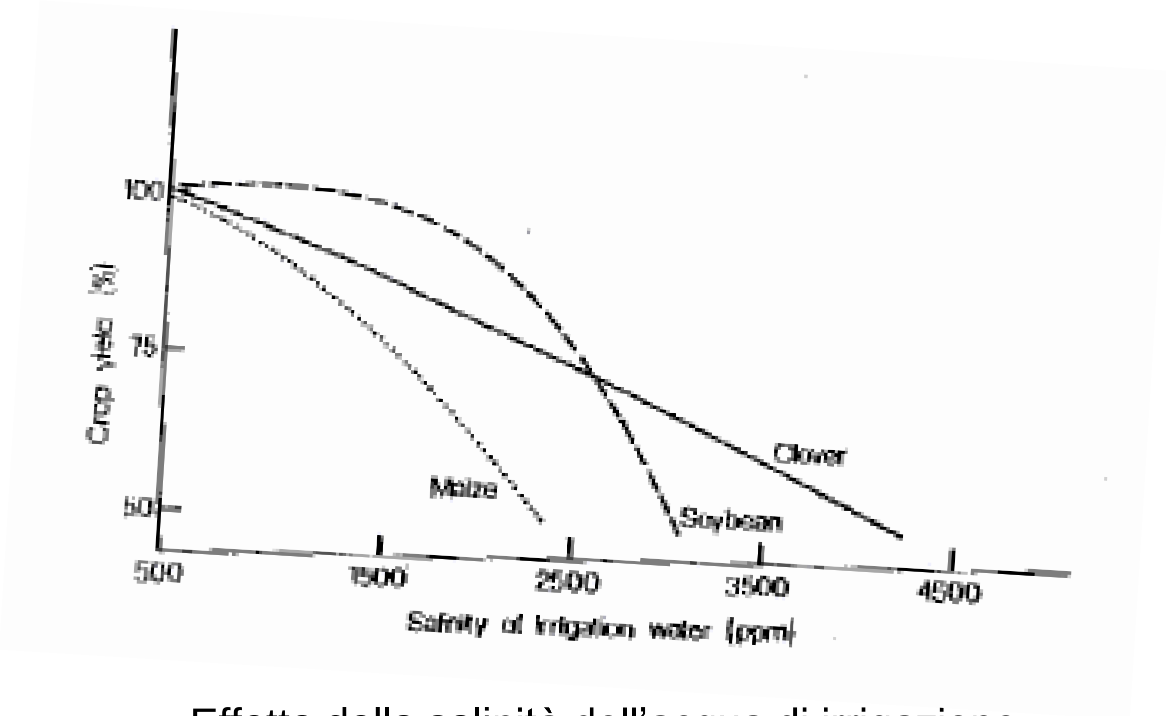
$$\sum Y_{sj} \leq V_s \qquad \forall s$$

3) La disponibilità dei terreni è limitata

$$\sum_i \sum_k X_{ijk} \leq A_j \qquad \forall s$$

4) Non negatività delle variabili di decisione

$$X_{ijk}, Y_{sj} \geq 0 \qquad \forall i, j, k, s \ \in F$$



Effetto della salinità dell’acqua di irrigazione
sulla resa di tre differenti colture.

Quindi:

PROBLEMA A DUE OBIETTIVI NON LINEARE

Metodologia di soluzione: Generazione insieme Pareto - ottimale

Es.: Metodo dei vincoli

a) Si fissa il valore di α (minima frazione coltivata) = $\bar{\alpha}$
b) Si risolve un problema ad un solo obiettivo (con un vincolo in più)
c) Si modifica $\bar{\alpha}$ e si torna a b)

$$\Downarrow$$

Per ogni punto della superficie Pareto-ottima si risolve un sistema non lineare con

55 variabili di decisione
27 vincoli

Nel problema c'è una sola funzione non lineare $P_i(Q_j)$

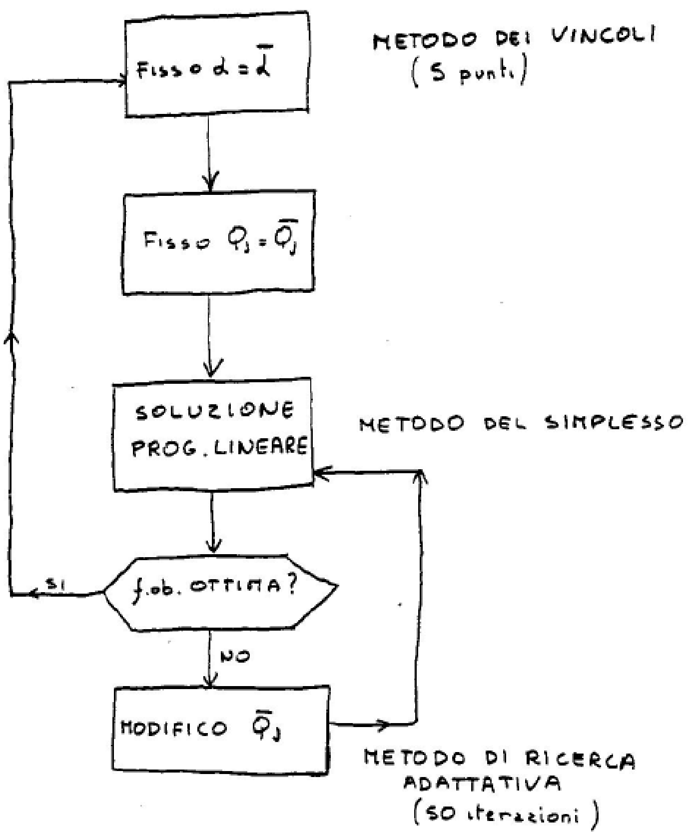
Metodo utilizzato

a) Fissare $Q_j = \bar{Q}_j$ per ogni regione, per cui il vincolo sulla qualità dell'acqua diviene:

$$\frac{\sum_s \left(Y_{sj} - \varepsilon_{sj} Y_{sj}\right) Q_s}{\sum_s \left(Y_{sj} - \varepsilon_{sj} Y_{sj}\right)} = \bar{Q}_j$$

b) Risolvere il problema lineare così ottenuto

c) Trovare la soluzione del problema di partenza mediante un algoritmo di ricerca di dimensione pari al n° di Q_j indipendenti.



Sono stati risolti 250 programmi lineari con 55 variabili di decisione e 32 vincoli.

DATI UTILIZZATI

TABLE 2: Data Input for the Analysis

CROP ROTATIONS	WATER REQUIREMENTS (m^3 per feddan)	PROFITS (L.E.per feddan)
i=1 Clover-rice	12,442	298
i=2 Clover-cotton	8,701	374
i=3 Clover-maize	7,989	152
i=4 Clover-soybean	8,312	158
i=5 Wheat-maize	8,362	184

IRRIGATION SYSTEMS	INSTALLATION COSTS (L.E.per feddan)
k=1 Surface	650.
k=2 Sprinkler	1500.
k=3 Drip	2500.

RECLAMATIONS REGIONS	SOIL TEXTURE
j=1 Sinai Northern coast	sandy & sandy clay
j=2 El Tina Plain	sandy & sandy calcareous
j=3 West of Suez Canal	saline clay
j=4 North of Salhia Canal	sandy & sandy clay
j=5 Area between Salhia & Ismailia Canals	sandy & sandy calcareous
j=6 South of Ismailia Canal	sandy & sandy calcareous
j=7 South of Manzala Lake	saline clay

SOURCES

s=1 Ismailia Canal
s=2 Salhia Canal
s=3 Port Said Canal
s=4 Bahr Hadous
s=5 Bahr El Baqar
s=6 Damietta Branch

NB Non tutte le combinazioni s,i,j,k sono possibili.

Es: l’irrigazione superficiale (k=1) non è possibile su suoli sabbiosi (j=1,2,4,5,6), ciascuna sorgente può servire solo regioni a quote meno elevate (i costi di pompaggio sono esclusi)

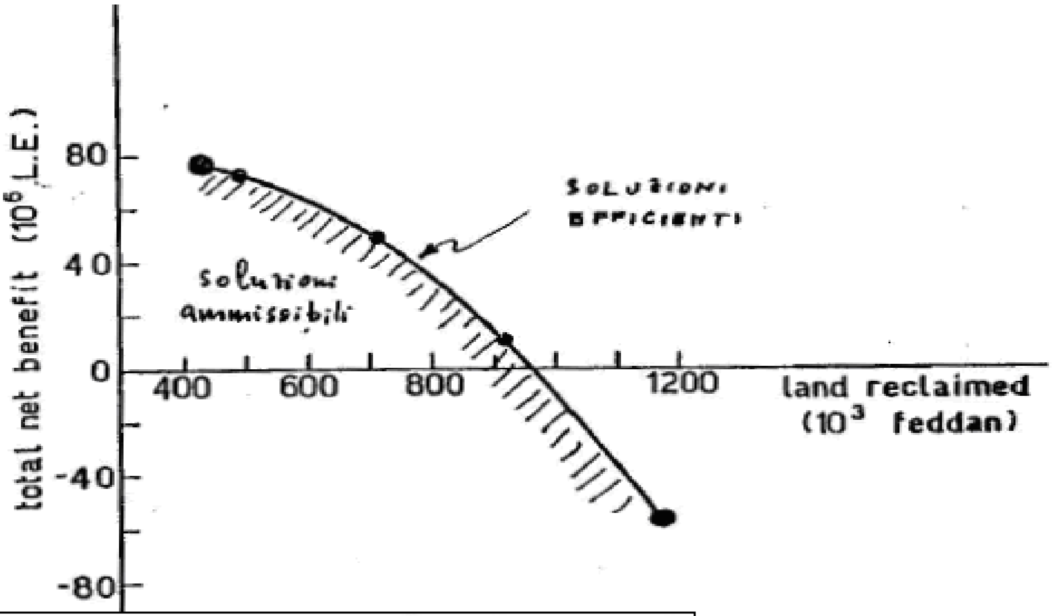
TABLE 3: Sample Results from Two Model Solutions

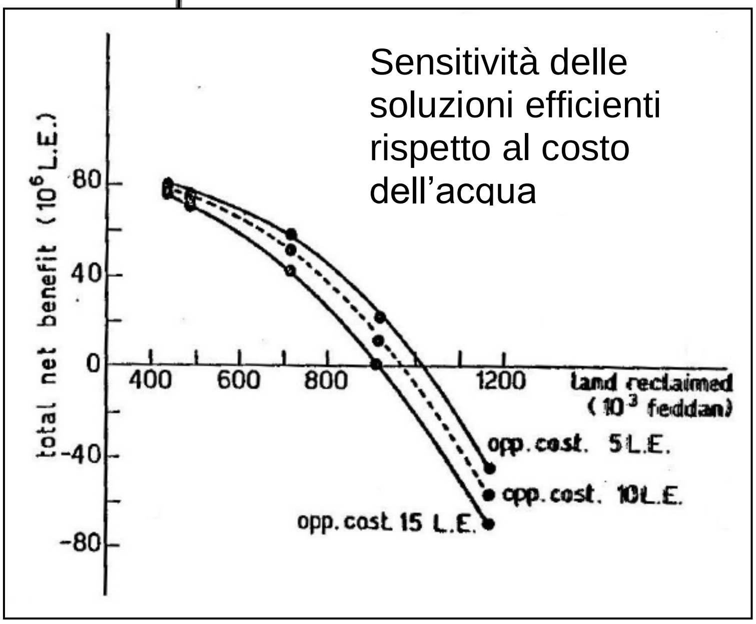
Region j	Maximum Economic Benefit			Maximum Land Reclamation Area		
	Source of Irrigation Water	Crop Rotation	Irrigation System	Source of Irrigation Water	Crop Rotation	Irrigation System
1	----*	----	----	B. Hadous 53** B. Baqar 64	Clover-soybean	Drip
2	B. Hadous 29** B. Baqar 15	Wheat-maize	Sprinkler	B. Baqar 14 B. Hadous 4 Pt. Said 100	Wheat-maize	Drip
3	B. Hadous 53 B. Baqar 62	Clover-cotton	Surface	B. Hadous 43 B. Baqar 22 Damietta 42	Clover-cotton Clover-soybean	Surface Drip
4	----	----	----	Salhia 25	Clover-soybean	Sprinkler
5	----	----	----	Ismailia 11	Wheat-maize	Sprinkler
6	B. Baqar 23	Wheat-maize	Sprinkler	Salhia 29	Wheat-maize	Sprinkler
7	Damietta 14 B. Hadous 8	Clover-cotton	Surface	Damietta 58	Clover-cotton	Surface

* - Not used, i.e. no reclamation undertaken in this area.

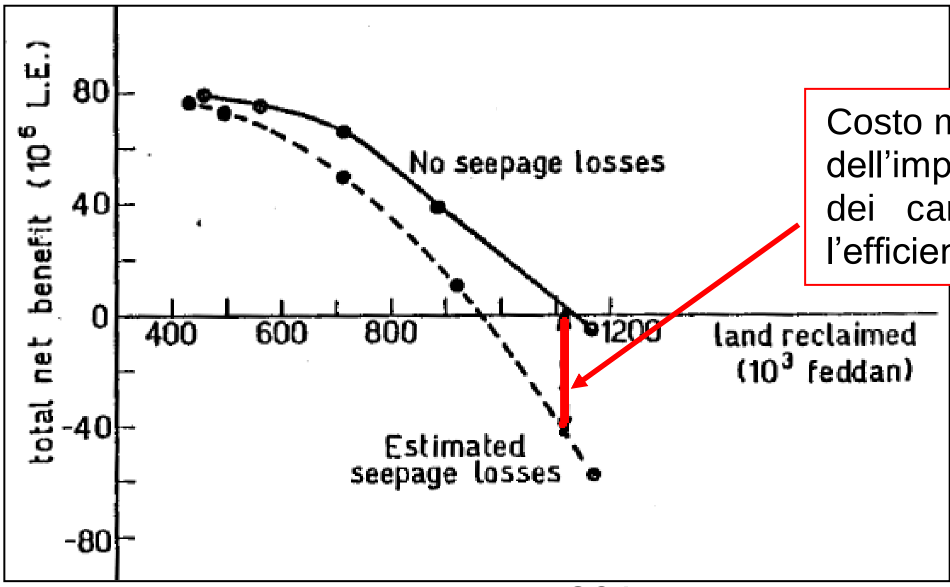
** - Numbers beside the sources of irrigation water represent the percentage of the water available at that source (V_s) used in the specified reclamation area.

SOLUZIONI EFFICIENTI NEL PIANO (benefici, sup. coltivata)





Sensitività delle soluzioni efficienti rispetto al costo dell'acqua



Costo massimo dell'impermeabilizzazione dei canali che mantiene l'efficienza della soluzione