

OTTIMIZZAZIONE NON LINEARE

In molti casi pratici non esistono algoritmi specifici per la soluzione del problema.

Si utilizzano quindi algoritmi basati su approssimazioni locali della funzione o algoritmi **euristici** (basati su regole “furbe” che conducono ad un “buon” subottimo).

Spesso gli algoritmi euristici sono basati su analogie con fenomeni naturali: il raffreddamento dei corpi (*simulated annealing*), i percorsi delle formiche (*ant colony*), l'evoluzione delle specie (*genetic algorithm - GA*). Tutti richiedono elevate potenze di calcolo (preferibilmente parallelo).

Vedremo i seguenti esempi di algoritmi:

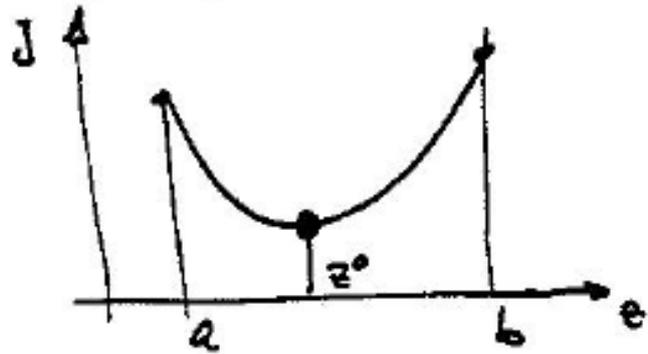
- Per problemi con una sola variabile di decisione (griglia, sezione aurea)
- Per problemi con n variabili e senza vincoli (griglia, gradiente, Newton)
- Per problemi con n variabili e vincoli (penalità, genetici)

Ottimizzazione monodimensionale

Molto spesso nel risolvere problemi di pianificazione o di progetto ci si trova nella situazione seguente:

$$\min_z J(z)$$

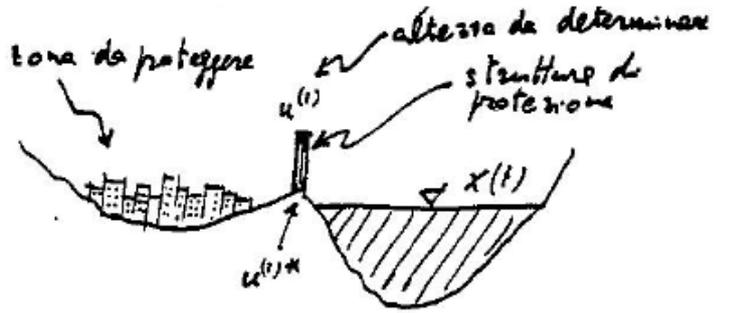
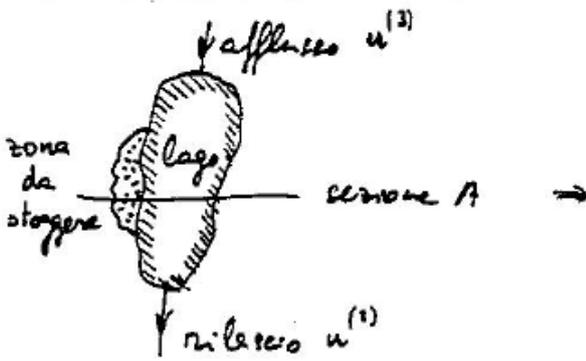
$$z \in Z$$



Con z scalare (cioè $a \leq z \leq b$) ma con J valutabile solo per mezzo di un algoritmo molto complesso che richiede l'uso del calcolatore. In questi casi è quindi opportuno cercare di determinare z° senza valutare la funzione in troppi punti z_i .

Vediamo dapprima un esempio in cui ci si trova in situazioni di questo tipo.

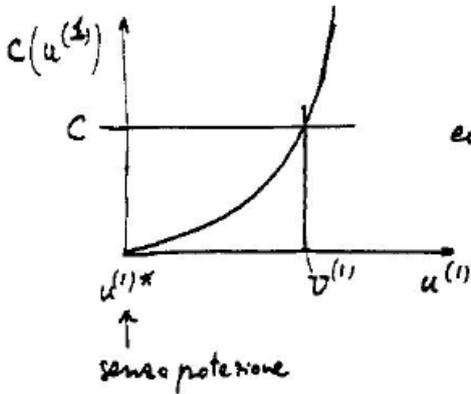
Esempio: altezza di una diga di protezione



$$\dot{x}(t) = \frac{1}{S} [u^{(3)}(t) - u^{(2)}(x,t)]$$

area lago

$\bar{u}^{(2)}(x,t) =$ regola operativa plausibilmente usata dal gestore della diga di regolazione



costo della struttura di protezione

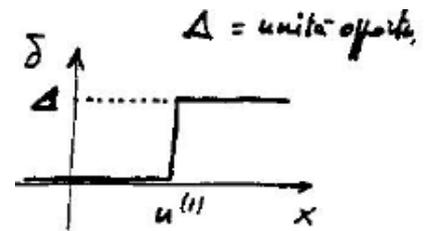
$\bar{u}^{(3)}(t) =$ possibili afflussi futuri (per esempio uguali a quelli passati)

Vincolo sul finanziamento: $c(u^{(1)}) \leq C \iff u^{(1)*} \leq u^{(1)} \leq U^{(1)}$

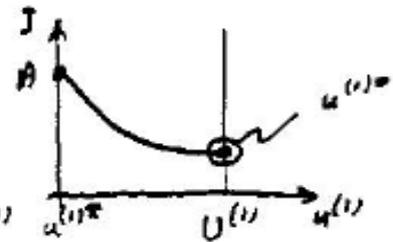
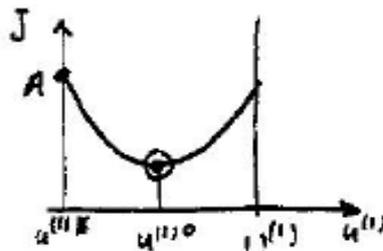
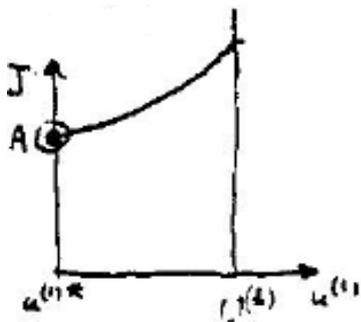
Danni di inondazione = tempo di inondazione

$$\min_{\{u^{(1)}\}} \left[\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \delta(x(t) - u^{(1)}) dt + c(u^{(1)}) \right]$$

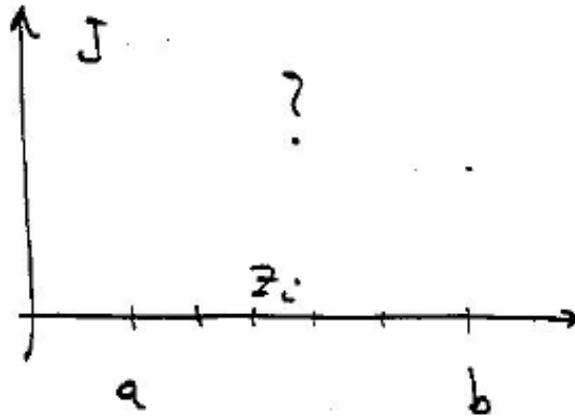
fattore di costo



Si hanno tre casi possibili:



Metodo della Griglia



Si fissano a priori n punti z_i in cui valutare J .

La griglia può essere: Regolare
 Casuale
 Irregolare

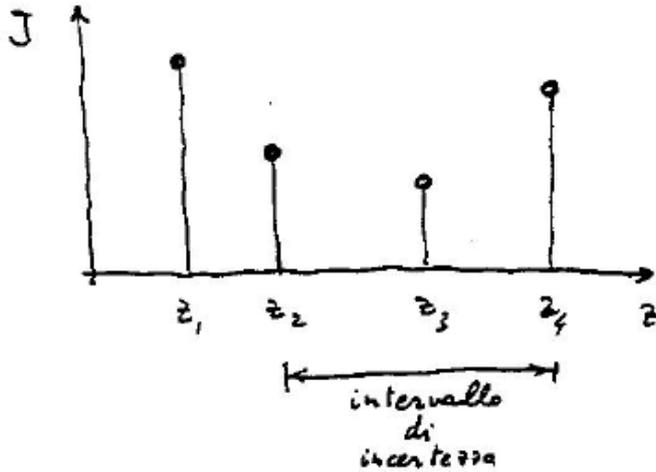
La griglia può essere irregolare per tener conto delle impressioni soggettive dell'operatore che infittirà i punti là dove crede che ci sia il minimo.

Con questo metodo l'intervallo di intermezzo è maggiore o uguale a

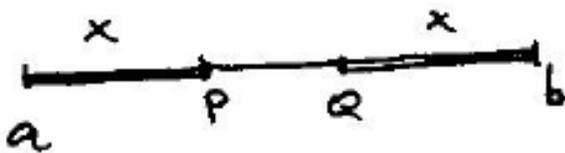
$$I = (b-a) / (n+1).$$

Si può anche fare una ricerca ricorsiva: prima una griglia poco fitta
→ seconda griglia intorno al punto migliore trovato → ...

Metodo della sezione aurea



Questo metodo è basato in parte su questa osservazione: se c'è un solo minimo e i valori già provati sono disposti come in figura, il punto di minimo è tra z_2 e z_4 (in altre parole si può eliminare $[z_1z_3]$)

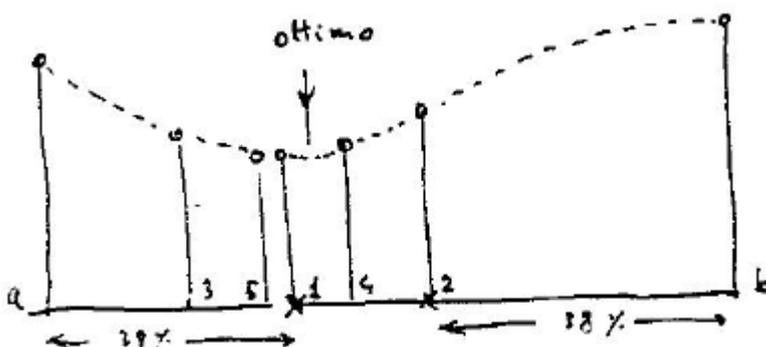


$[a, b] = I$ intervallo di incertezza

Problema: In quali punti P e Q valutare J in modo che una volta eliminato l'intervallo $[a, P]$ o $[Q, b]$ si possa con una sola nuova misura ritrovarsi di nuovo nelle condizioni di figura con un intervallo di incertezza più piccolo?

$$\frac{x}{b-a} = \frac{\overbrace{(b-a) - 2x}^{PQ}}{\underbrace{(b-a) - x}_{Pb}} \rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (b-a) = 0.38(b-a)$$

sezione aurea

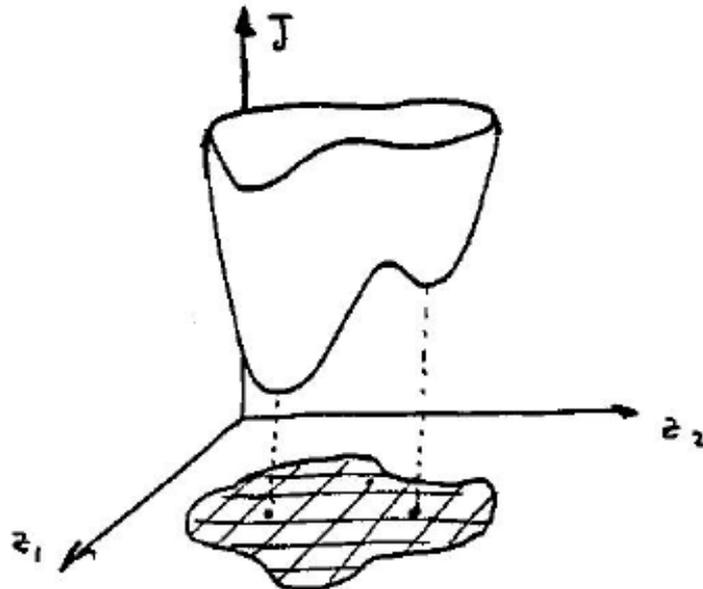


Ad ogni iterazione si riduce l'intervallo di incertezza (o indeterminazione)

$[a, b] \rightarrow [a, 2] \rightarrow [3, 2] \rightarrow [3, 4] \rightarrow [5, 4] \rightarrow \dots$

Ottimizzazione n-dimensionale non vincolata

Griglia



La funzione obiettivo J viene valutata in corrispondenza dei punti di una griglia molto larga (regolare o no a seconda dei casi).

Indi si sceglie il punto $z^{(i)}$ (tra quelli esaminati) col più piccolo valore di J e si definisce una nuova griglia (più fitta della precedente) intorno a tale punto.

Così si procede fino a che si ottiene un minimo relativo con l'approssimazione voluta.

Questo metodo funziona solo se n è basso: se ad esempio si hanno 10 variabili, ognuna delle quali può assumere 10 valori, la griglia è costituita da 10^{10} punti! Se la valutazione della funzione richiede 1 secondo, ciò significa 3 secoli!

Questo metodo tende, più di altri, a fornire il minimo assoluto di J perché i tentativi non dipendono dalla forma locale della funzione.

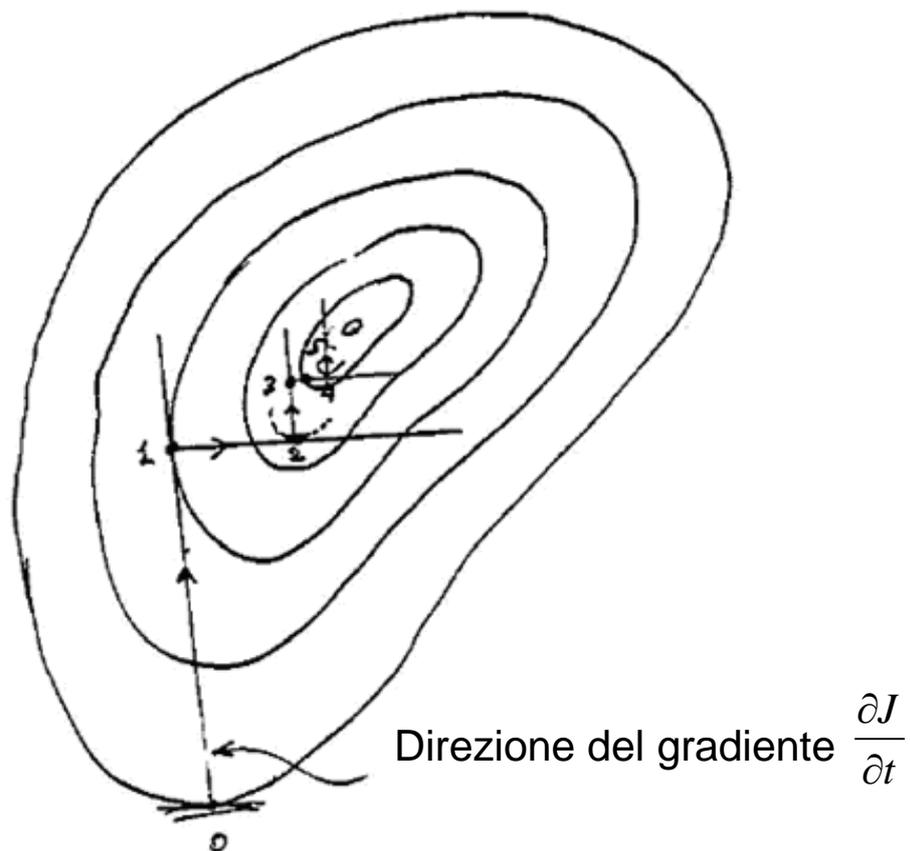
Gradiente

Questo metodo è definito da

$$z^{t+1} = z^t + \alpha_{t+1} s^{t+1}$$

$$\text{con } s^{t+1} = \left[\frac{\partial J}{\partial z} \right]$$

e α_{t+1} ottimizzato con metodo monodimensionale (per esempio, sezione aurea).



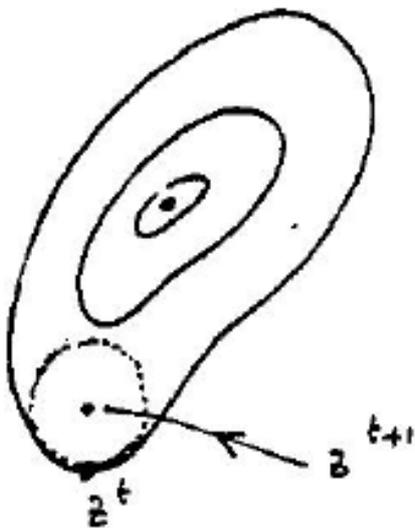
Newton

Questo metodo usa anche le derivate seconde $\frac{\partial^2 J}{\partial z_i \partial z_j}$ (cioè

l'Hessiano $H = \left[\frac{\partial^2 J}{\partial z_i \partial z_j} \right]$ valutato nel punto z^t) per calcolare la variazione

$z^t \rightarrow z^{t+1}$

$$\left. \begin{aligned} z^{t+1} &= z^t + \alpha_{t+1} s^{t+1} \\ \alpha_{t+1} s^{t+1} &= - \left[\frac{\partial^2 J}{\partial z} \right]_{z^t}^{-1} \left[\frac{\partial J}{\partial z} \right]^T \end{aligned} \right\} (1)$$



Questo metodo consiste nell'approssimare localmente J con una funzione quadratica

$$J(z) \cong J(z^t) + \left[\frac{\partial J}{\partial z} \right] (z - z^t) + \frac{1}{2} (z - z^t) \left[\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} \right]_{z^t} (z - z^t) \quad (*)$$

e nel scegliere come nuovo valore z^{t+1} il punto di minimo della (*) che è appunto dato dalla (1)

Ottimizzazione n-dimensionale vincolata

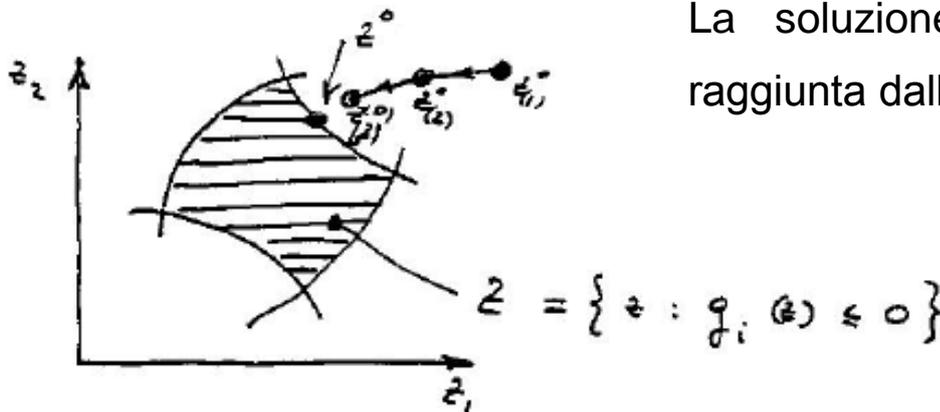
Metodo di penalità

Questo metodo determina la soluzione ottima z° del problema:

$$\begin{aligned} \min [J(z)] \\ g_i(z) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

per approssimazioni successive $z^\circ(1), z^\circ(2), \dots, z^\circ(k), \dots$

Le soluzioni approssimate $z^\circ(k)$, in generale, non soddisfano tutti i vincoli $g_i(z) \leq 0$.



La soluzione ottima viene raggiunta dall'esterno di Z

La soluzione $z^\circ(k)$ viene determinata risolvendo il problema non vincolato (**)

$$\min [J(z) + \mu_k P(z)] \quad (**)$$

Dove $\mu_k > 0$ e $P(z)$ è la funzione di penalità:

$$P(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in Z \\ > 0 & \text{se } z \notin Z \end{cases}$$

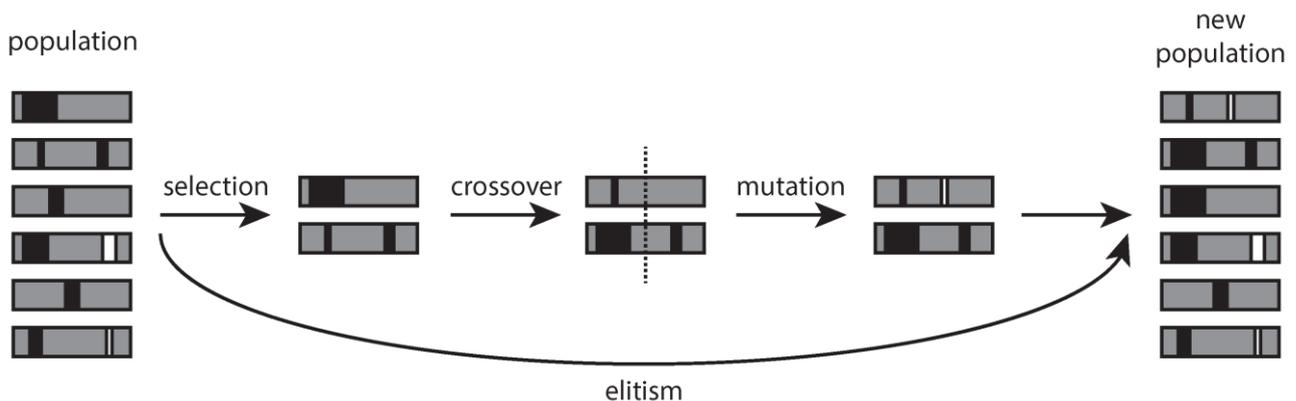
$$p.e. \quad P(z) = \sum_i g_i(z) \quad i \in \text{vincoli non soddisfatti}$$

I pesi μ_k sono crescenti con k e $\lim_{\mu_k \rightarrow \infty} z^\circ(k) = z^\circ$

Algoritmi genetici (GA)

Simulano, in modo molto rapido, l'evoluzione di una specie vivente, replicando (approssimativamente) i principali meccanismi che la determinano.

- Si parte con una “popolazione” di soluzioni prese casualmente e si valutano i corrispondenti valori dell'obiettivo
- Si selezionano le soluzioni migliori
- Si “accoppiano” (crossover) le soluzioni prendendo parti di due soluzioni diverse tra quelle selezionate
- Si opera una mutazione, modificando parti (geni) delle soluzioni correnti
- Le soluzioni così ottenute formano una nuova popolazione da cui si riparte.



- Un limitato numero di soluzioni molto buone (élite) viene mantenuto da una generazione alla successiva (cioè non passa attraverso le fasi precedenti).

Esempio: miglior veicolo a 2 ruote (https://rednuht.org/genetic_cars_2/)

