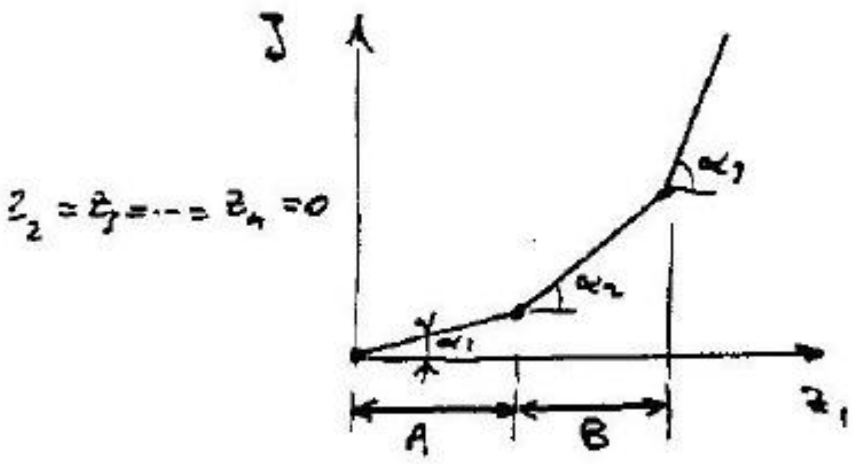
Funzioni obiettivo lineare a tratti

Si supponga che la funzione obiettivo $J(z)$ sia non lineare rispetto ad una (o più) delle variabili di decisione. Ipotizziamo tuttavia che la non linearità sia di tipo particolare.



Funzione lineare a tratti e <u>convessa</u> $(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$

$z_i \geq 0$

Si ponga allora $\mathbf{z_1 = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3}}$

Cioè si sostituisca a z_1 la somma delle tre nuove variabili z_{n+1}, z_{n+2} e z_{n+3}.

Quindi $J(z) = \underbrace{(\alpha_1 z_{n+1} + \alpha_2 z_{n+2} + \alpha_3 z_{n+3})}_{\text{parte non lineare}} + \underbrace{r_2 z_2 + \ldots + r_n z_n}_{\text{parte lineare}}$

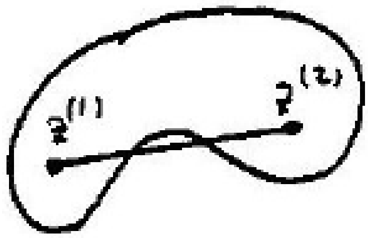
$$0 \leq z_{n+1} \leq A \qquad 0 \leq z_{n+2} \leq B \qquad 0 \leq z_{n+3} \leq C$$

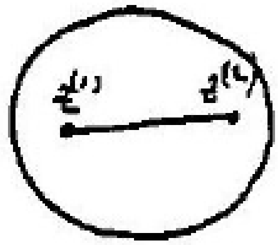
$$\text{inoltre, deve essere: } \begin{cases} z_{n+1} < A \rightarrow z_{n+2} = 0 \\ z_{n+2} < B \rightarrow z_{n+3} = 0 \end{cases}$$

ma queste condizioni (non lineari) sono automaticamente verificate se $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$

Interpretazione geometrica (1)

L'insieme Z è un <u>insieme convesso</u>





Un insieme è convesso se il segmento da $z^{(1)}$ a $z^{(2)}$ è tutto contenuto nell'insieme.

Nel nostro caso

$$\left.\begin{array}{l} z^{(1)} \in Z \\ z^{(2)} \in Z \end{array}\right\} ipotesi$$

$$z = \alpha z^{(1)} + (1-\alpha) z^{(2)} \qquad \text{con} \qquad 0 \le \alpha \le 1 \quad (\text{segmento da } z^{(1)} \text{ a } z^{(2)})$$

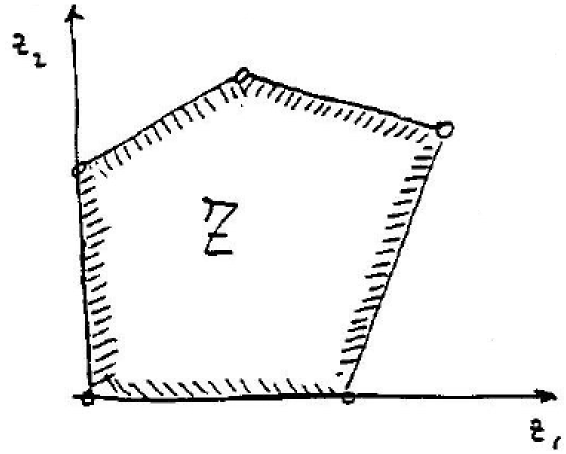
$$\mathrm{Pz{=}P}\left(\alpha z^{(1)} + (1-\alpha) z^{(2)}\right) = \alpha P z^{(1)} + (1-\alpha) P z^{(2)} = \alpha q + (1-\alpha) q = q$$

$$\left.\begin{array}{l} z^{(1)} \ge 0 \\ z^{(2)} \ge 0 \end{array}\right\} \rightarrow z = \alpha z^{(1)} + (1-\alpha) z^{(2)} \ge 0$$

Quindi l'intero segmento da $z^{(1)}$ a $z^{(2)}$ appartiene a Z, cioè Z è convesso.

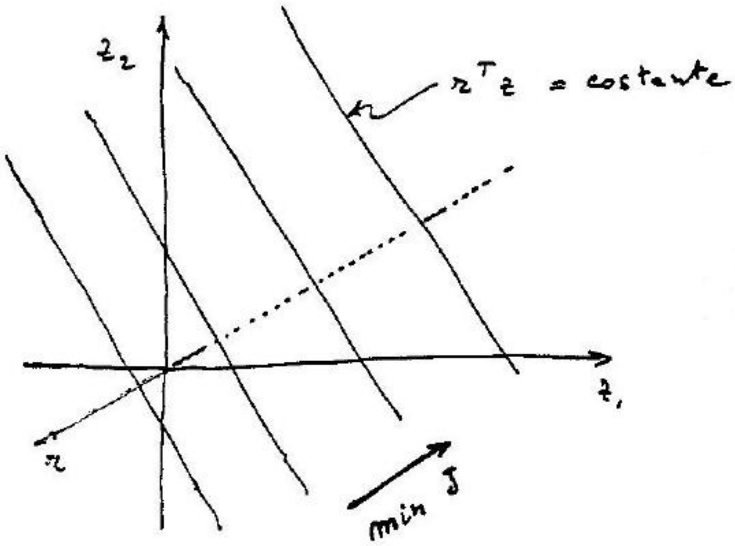
In effetti Z è un <u>poliedro convesso</u> nello spazio a n dimensioni.

Interpretazione geometrica (2)

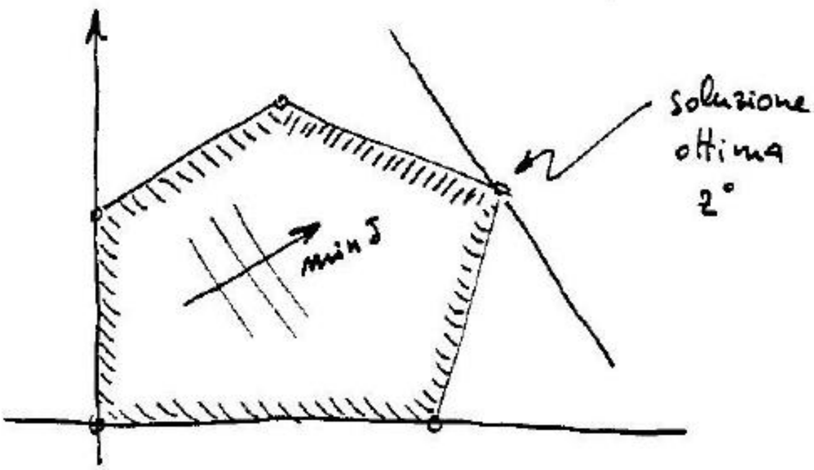


Proiezione dell'insieme Z nel piano (z_1, z_2)

o vertici



Su questi iperpiani la funzione obiettivo J(z) è costante



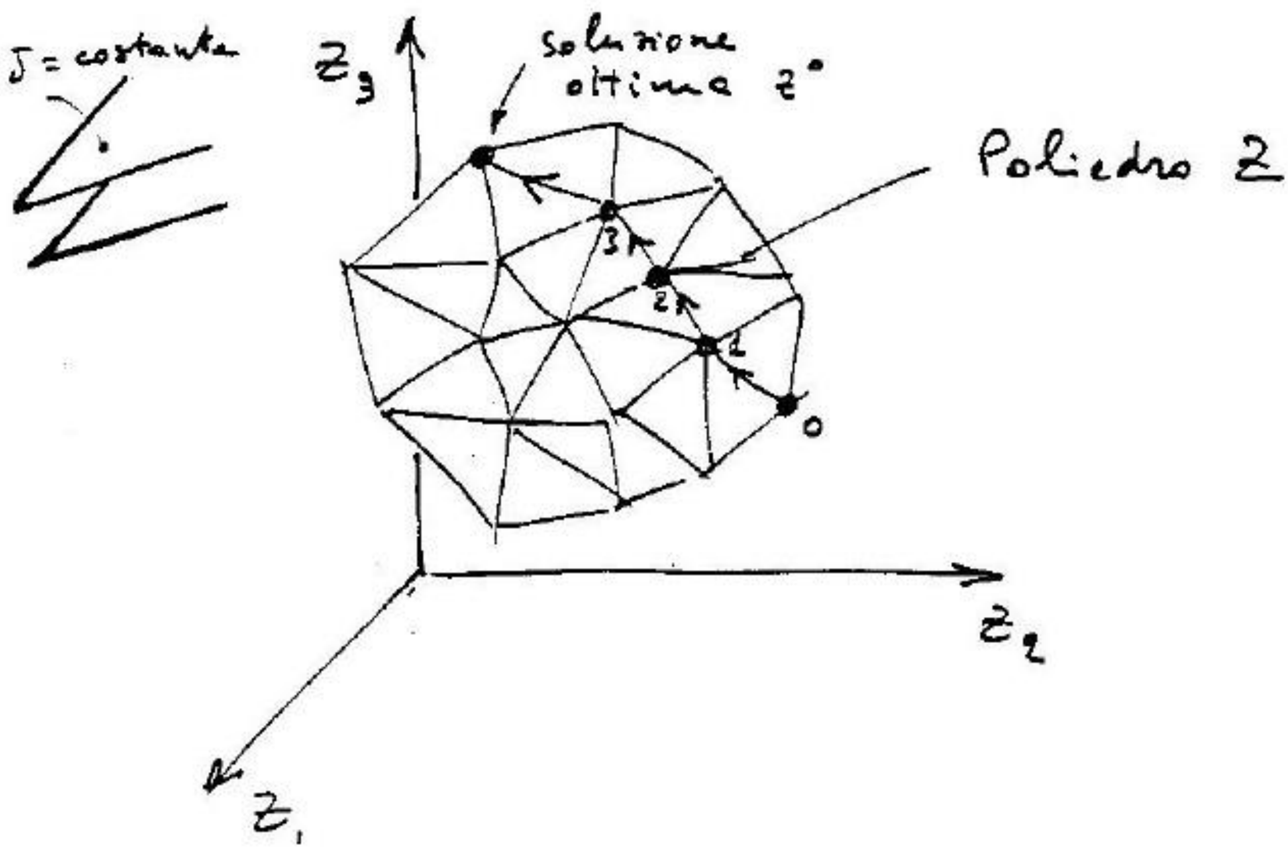
La soluzione ottima è su un vertice!

Soluzione di un programma lineare

L’algoritmo di gran lunga più usato è il SIMPLESSO inventato da G. B. Dantzig.

L’algoritmo del Simplesso comprende una fase di inizializzazione (1) e una di iterazione (2).

1. Trova una soluzione ammissibile che corrisponda a un vertice di Z
2. Tra i vertici vicino a quello “corrente” scegli quello cui corrisponde il maggior decremento della funzione obiettivo e continua così fino a che è possibile diminuire J.



Dualità

Programma Primale

$$\min\left[r^T z\right]$$
$$Pz \geq q$$
$$z \geq 0$$

Programma Duale

$$\max\left[q^T \lambda\right]$$
$$P^T \lambda \leq r$$
$$\lambda \geq 0$$

$$(P, q, r^T, \min, \geq) \qquad \equiv \qquad (P^T, r, q^T, \max, \leq)$$
$$\phi(\lambda) = q^T \lambda \leq \underbrace{q^T \lambda^\circ}_{\phi(\lambda^\circ)} \qquad = \qquad \underbrace{r^T z^\circ}_{J(z^\circ)} \leq r^T z = J(z)$$

Poiché la complessità di un programma lineare (numero di operazioni necessarie a risolverlo) è proporzionale al cubo del numero dei vincoli, in alcuni casi (poche variabili di decisione e tanti vincoli) è conveniente dal punto di vista computazionale risolvere il problema duale.

Sensitività e prezzi ombra

In molti problemi i vincoli q_i sono dei parametri che possono variare e rispetto ai quali è necessario quindi determinare la sensitività della soluzione. In altre parole, interessa calcolare:

$$\frac{\partial J(z^\circ)}{\partial q_i}$$

Per dualità abbiamo $J(z^\circ) = \sum_i \lambda_i{}^\circ q_i$ per cui risulta che la variabile duale λ_i all'ottimo è proprio la sensitività cercata, cioè:

$$\frac{\partial J(z^\circ)}{\partial q_i} = \lambda_i{}^\circ$$

Questi λ_i° si chiamano anche prezzi ombra perché nel caso in cui J sia un beneficio e q_i una risorsa essi rappresentano il prezzo massimo che si dovrebbe essere disposti a pagare per incrementare la risorsa e quindi il beneficio.

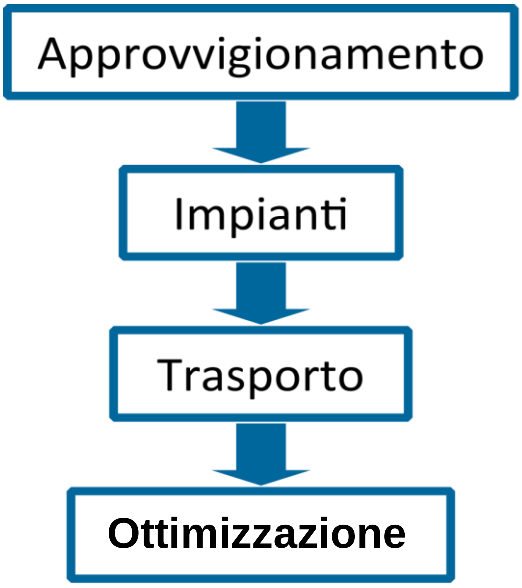
Tale prezzo di solito non corrisponde con il prezzo di mercato della risorsa.

E' evidente che, se all'ottimo un vincolo non è attivo (la risorsa è abbondante e quindi lo slack è diverso da 0), il corrispondente prezzo ombra non potrà che essere nullo e viceversa.

PL – STUDIO DI CASO

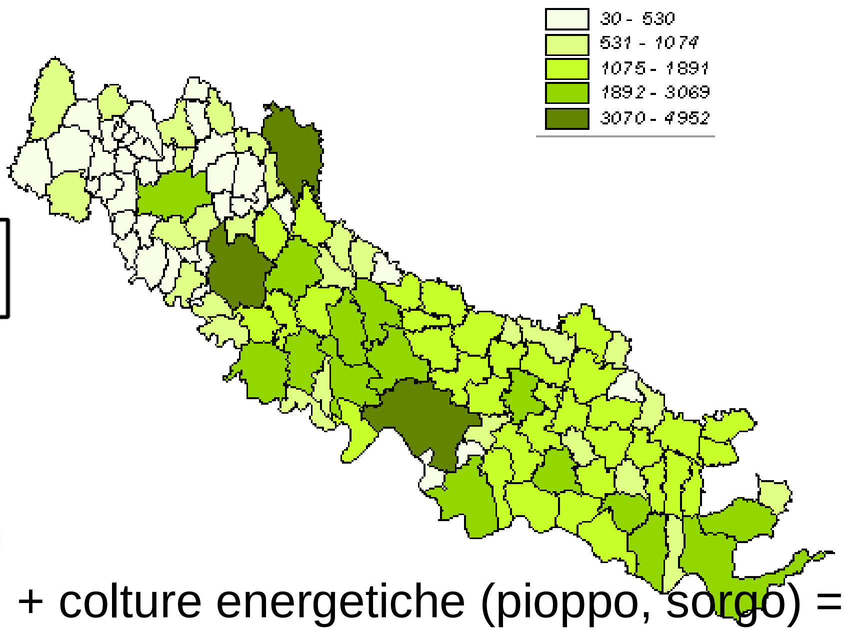
Impianti a biomassa in provincia di Cremona

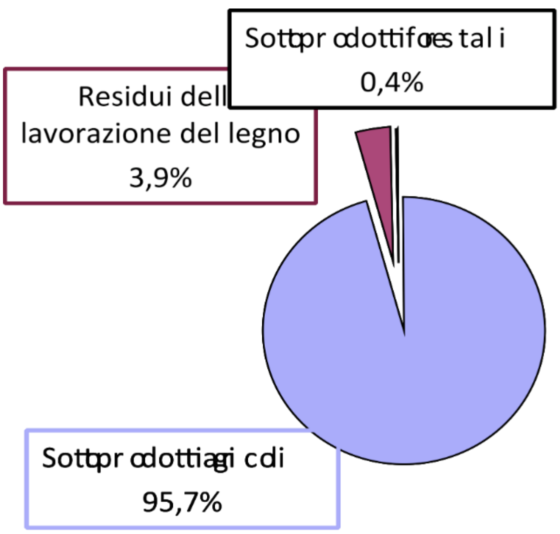
Vedi: Fiorese, Gatto, Guariso; Utilizzo delle biomasse a scopo energetico: un'applicazione alla Provincia di Cremona, *L'Energia Elettrica*, 82, 1-8, 2005.



Vogliamo determinare quanta energia si può produrre utilizzando biomassa da combustione in centrali di cogenerazione.

Residui agricoli e boschivi + scarti industria del legno





+ colture energetiche (pioppo, sorgo) =

= 226.400 ton ss/anno

Scelta impianto tipico:

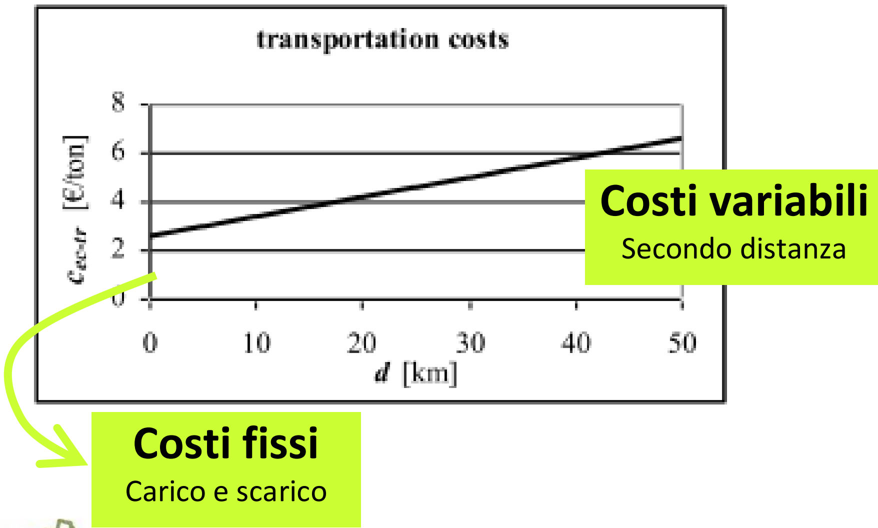
6 MWt, η = 80%

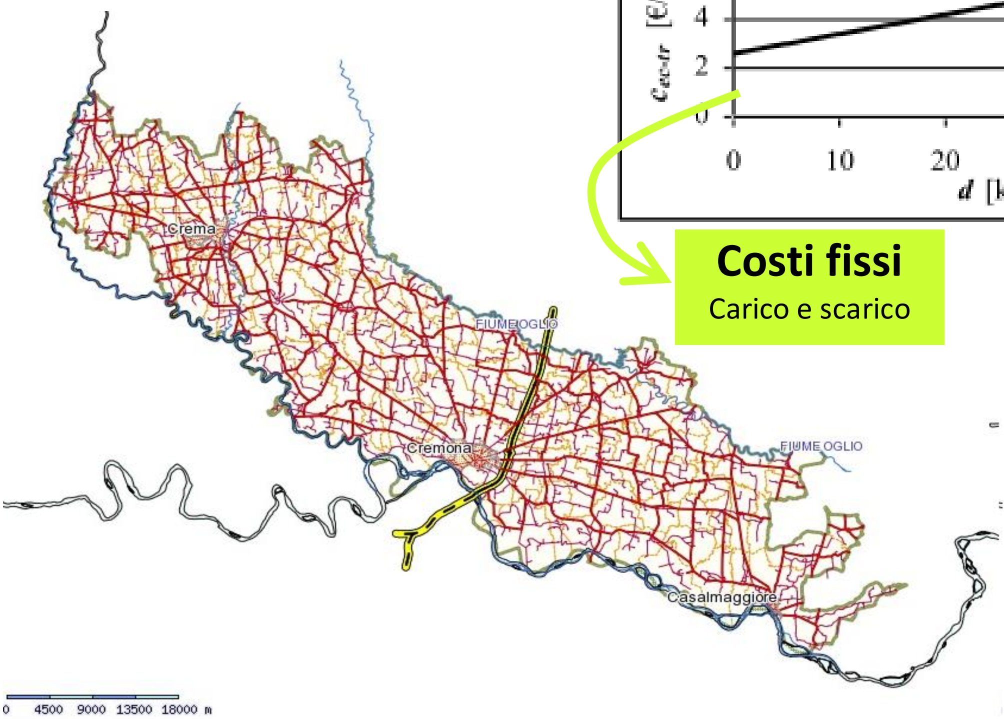
Ciclo ORC: 1,1 MWe, ηe = 17%

7,2 MWt, ηt = 80%

Elettrico/termico = 0,215

Trasporto:





Ottimizzazione:

Problema di programmazione lineare a variabili reali e binarie

Variabili di decisione:

x_{ijs} [0,1] frazione della biomassa di tipo s (residui, SRF) presente nel comune i conferita all'impianto di cogenerazione j

y_j {0,1} la centrale di cogenerazione nel comune j è attiva se y_j = 1, non attiva se y_j = 0

Obiettivo:

max Energia netta =

= Energia prodotta – energia trasporto – energia SRF

$$J_{EN} = \sum_{j=1}^{N} \left(EN_{out,j} - EN_{trasporto,j} - EN_{SRF,j} \right)$$

$$EN_{out-el,j} = \eta_{el} \cdot \alpha \cdot \sum_i \sum_s a_{is} \cdot (1 - u_s) \cdot pci_s \cdot x_{ijs}$$

$$EN_{out-term,j} = \frac{EN_{out-el,j}}{\beta}$$

$$EN_{trasporto,j} = \sum_{i=1}^{N} \sum_s \left(2c_{tr}^{\mathrm{var}} d_{ij} + c_{tr}^{fisso} \right) \cdot a_{is} x_{ijs}$$

$$EN_{SRF} = c_{en,SRF} \sum_i a_{iSRF} x_{ijSRF}$$

Vincoli:

La biomassa può essere conferita solo ad un impianto attivo

$$x_{ijs} \le y_i \quad \forall s, j$$

Non posso usare più biomasse di quante ce ne siano

$$\sum_j \sum_s x_{ijs} \le B_i \quad \forall i$$

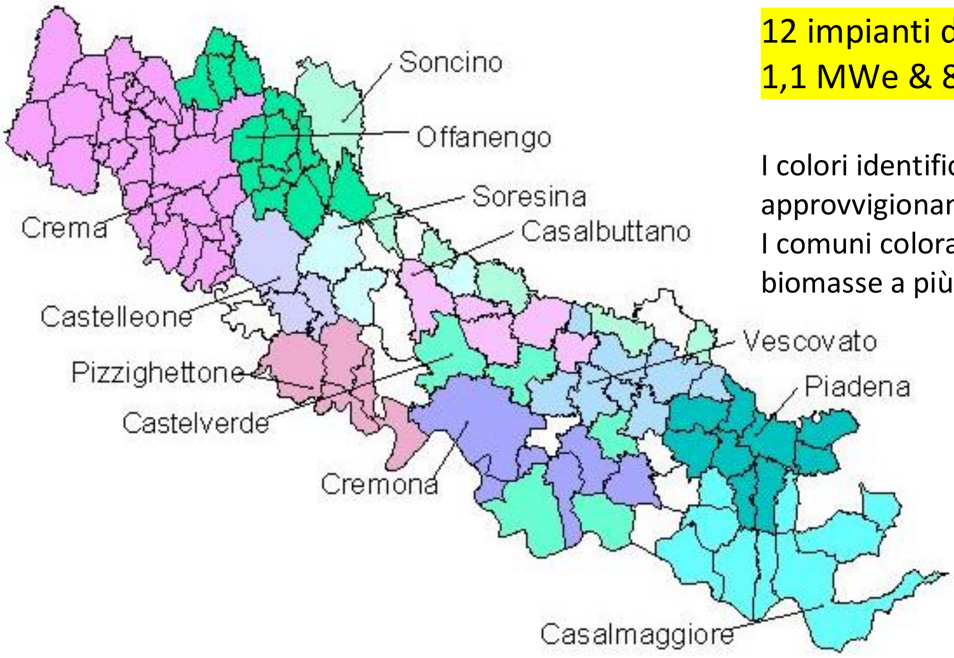
La capacità dell'impianto è assegnata

$$CAP_j \cdot \xi^L \cdot y_j \le \sum_i \sum_s LHV_s \cdot u_s \cdot x_{ijs} \le CAP_j \cdot \xi^H \cdot y_j \quad \forall j$$

Le variabili di decisione sono non negative o binarie

$$x_{ijk} \ge 0 \quad \forall i, j, k; \qquad y_j = \{0,1\} \quad \forall j$$

Risultati:



12 impianti di cogenerazione
1,1 MWe & 8 MWt

I colori identificano il bacino di approvvigionamento
I comuni colorati in bianco conferiscono biomasse a più impianti

Valore dell'obiettivo: 2.581 10^6 MJ

Energia necessaria per il trasporto incide per < 2%

7,8% consumi di combustibili fossili (1996)

Si possono valutare le emissioni di CO_2 risparmiate:

Emissioni equivalente energia da gas – emissioni trasporto – emissioni SRF

- 8,4% emissioni di CO_2 2002

e i benefici economici (tempo di recupero dell'investimento ≈ 9 anni)