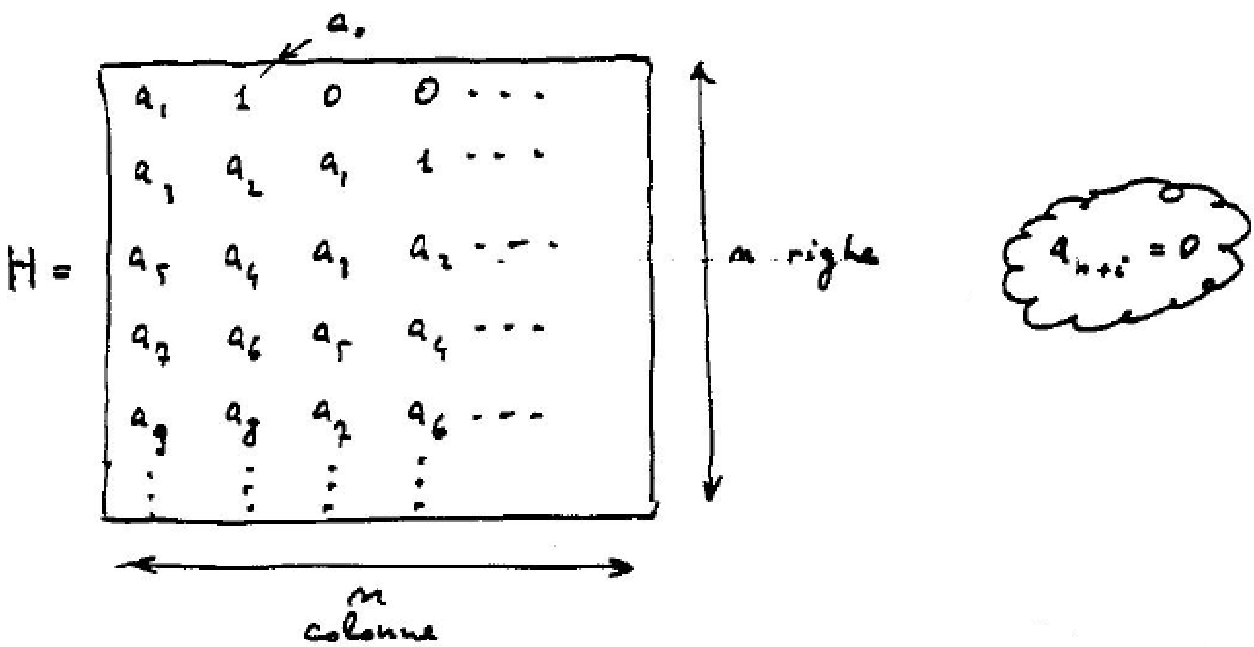
Metodi per la determinazione del segno degli autovalori

Una volta determinati gli a_i non è strettamente necessario calcolare gli autovalori λ_i perché basta verificare se:

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall \mathrm{i}$$

Per questo sono stati sviluppati dei test diversi.

Test di Hurwitz (1895)



$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall \mathrm{i} \quad \longleftrightarrow \quad D_1 = a_1 \ , D_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathrm{D}_3 = \det\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} , \ldots. , \text{tutti positivi}$$

Calcolo degli autovalori: ALCUNI CASI IMPORTANTI

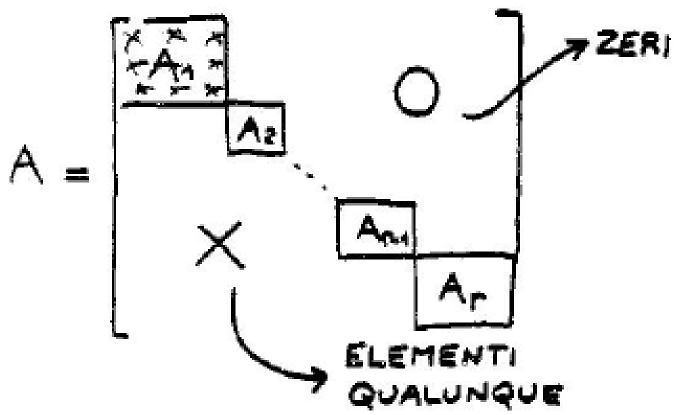
- **A triangolare**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono gli elementi della diagonale: $\lambda_i = a_{ii}$, i=1,2,…,n

(caso particolare: A diagonale)

- **A triangolare “a blocchi”**:



$A_1, A_2, \ldots, A_r$ sono SOTTOMATRICI QUADRATE

In questo caso:

$$\{\text{autovalori di A}\} = \{\text{autovalori di } A_1\} \cup \{\text{autovalori di } A_2\} \cup \ldots \{\text{autovalori di } A_r\}$$

In alcuni casi, si può dire qualcosa sulla STABILITA'/INSTABILITA' del sistema senza dover calcolare gli autovalori.

Ricordo che, in generale:

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$
$$tr\ A \triangleq a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

Allora:

1. A asint. stab. $\longrightarrow$ tr A < 0 quindi:

$\text{tr A} \geq 0 \longrightarrow \text{A non asint. stab.} \{\exists \text{ un } \lambda_i \text{ con } \mathrm{Re}(\lambda_i) \geq 0\}$

$\text{tr A} > 0 \longrightarrow \text{A instabile} \{\exists \text{ un } \lambda_i \text{ con } \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0\}$

2. Solo per sistemi del 2° ordine (*n*=2)

$$A \text{ asnt.stabile} \leftrightarrow \begin{cases} \text{continui} \begin{pmatrix} \text{tr } A < 0 \\ \det A > 0 \end{pmatrix} \\ \text{discreti} \begin{cases} |\text{tr } A| < 1 + \det A \\ |\det A| < 1 \end{cases} \end{cases}$$

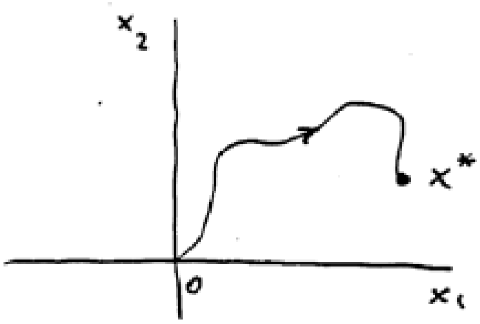
3. Inoltre, si dimostra che:

$$\text{A asint. stabile} \longrightarrow \begin{cases} \text{tutti i coefficienti} \\ \text{del polinomio caratteristico} \\ \Delta_A(\lambda) \text{ sono} > 0 \end{cases}$$

ALTRE PROPRIETA' STRUTTUTALI

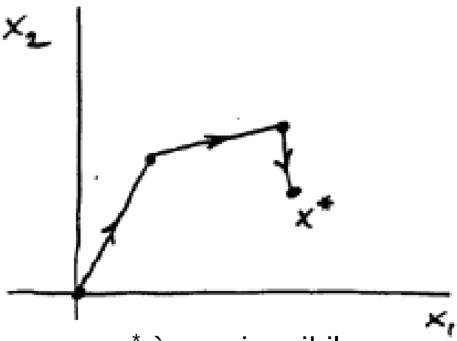
Raggiungibilità

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad\qquad x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$



x * è raggiungibile

(da 0) in tempo finito



x * è raggiungibile

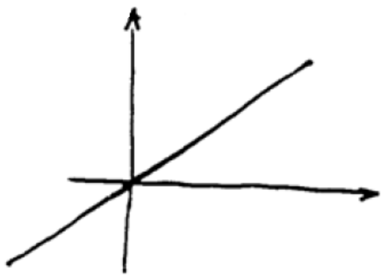
(da 0) in tempo finito

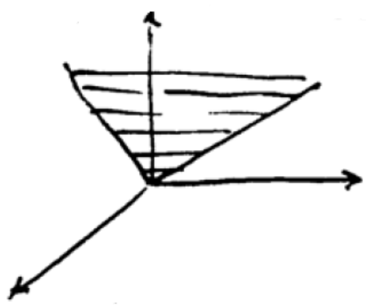
(tre transazioni)

$$X_r = \{\text{insieme degli stati raggiungibili (da 0 in tempo finito)}\}$$

Se X_r ≡ intero spazio di stato, si dice che il sistema è completamente raggiungibile.

Nei sistemi lineari X_r è un sottospazio (cioè un iperpiano contenente l'origine dello spazio di stato)





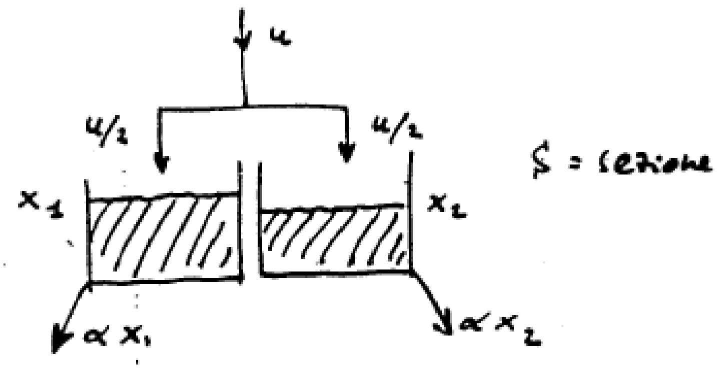
Test di Kalman per la Raggiungibilità

$$R = \text{Matrice di raggiungibilità} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \; .... \; A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

$$rango(R) = n \longleftrightarrow \text{sistema (A,B) complet. raggiungibile}$$

Più in generale: Campo di R = sottospazio di raggiungibilità X_r

Esempio

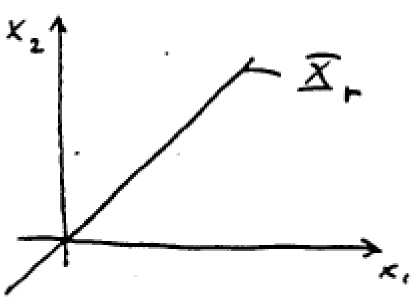


$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{S} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{S} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2S} \\ \frac{1}{2S} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2S} & -\frac{\alpha}{2S^2} \\ \frac{1}{2S} & -\frac{\alpha}{2S^2} \end{pmatrix}$$

due colonne proporzionali → rango R=1

→ sistema non completamente raggiungibile



X_r = campo R = vettori del tipo $(b \; b)^T$

Partendo da serbatoi vuoti i due livelli restano uguali

Dimostrazione del Test di Kalman (sistemi discreti)

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$
$$x_0 = 0 \ \text{ (per def. si parte da 0)}$$
$$x_1 = Bu_0$$
$$x_2 = ABu_0 + Bu_1$$
$$x_3 = A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2$$
$$\vdots$$
$$x_n = A^{n-1}Bu_0 + A^{n-2}Bu_1 + \ldots + Bu_{n-1}$$
$$\mathrm{X}_r^*(k) \triangleq \{\text{stati raggiungibili in k transizioni}\}$$
$$\mathrm{X}_r^*(1) = \text{ Campo di} \left|\mathrm{B}\right|$$
$$\mathrm{X}_r^*(2) = \text{ Campo di } \left|\mathrm{B} \ \ \mathrm{AB}\right|$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{X}_r^*(n) = \text{ Campo di } \left|\mathrm{B} \ \ \mathrm{AB} \ \ \mathrm{A}^2\mathrm{B}\ldots\mathrm{A}^{n\text{-}1}\mathrm{B}\right| \quad \text{(matrice di Kalman di R)}$$

D’altra parte si può dimostrare (usando il teorema di Cayley – Hamilton) che:

$$\mathrm{X}_r^*(n) = \mathrm{X}_r^*(n+\alpha) \qquad (\alpha \geq 1)$$

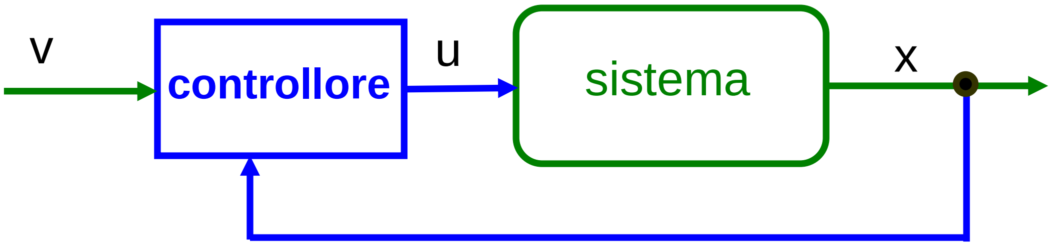
Quindi segue che:

$$\mathbf{X}_r^*(k) = \text{campo di } \mathbf{R} \ \ \forall \ k \geq n$$

LA LEGGE DI CONTROLLO

Immaginiamo di avere un sistema completamente definito, di cui sia possibile misurare lo stato ($y \equiv x$), e di cui vogliamo modificare il comportamento dinamico.

Un modo per intervenire è quello di costruire un controllore (gestore,…) da mettere in retroazione al sistema che faccia dipendere u dal valore misurato di x e da eventuali ingressi esterni v.



$u(t) = F(x(t),v(t))$ LEGGE DI CONTROLLO

Il controllore è la macchina, persona o complesso decisionale che realizza la funzione - legge di controllo $F(x,u)$.

Il problema della "sintesi del controllore" è quello di determinare la forma della funzione F e la sua conseguente implementazione (quale tecnologia, quali persone, ecc.)

IL CASO LINEARE

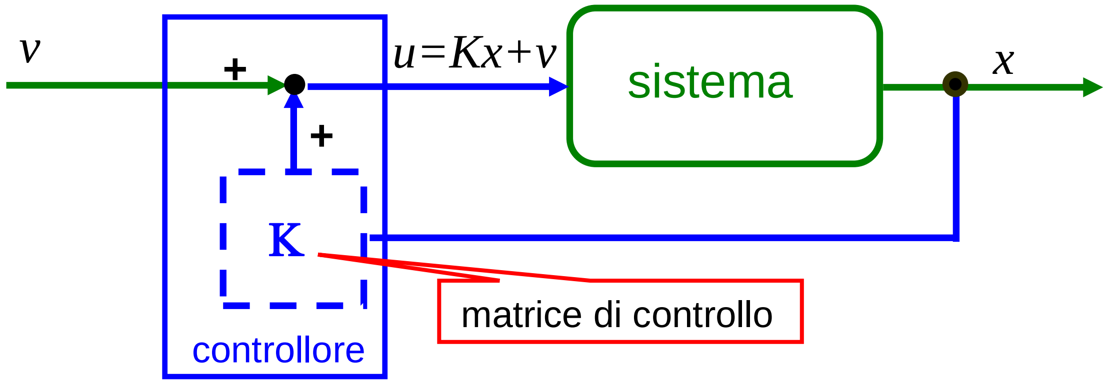
Se il sistema di cui vogliamo modificare il comportamento è lineare, continuo o discreto

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad\qquad x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y = Cx \qquad\qquad y(t) = Cx(t)$$

significa che il polinomio caratteristico del sistema

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

implica degli autovalori che per qualche ragione (determinano scarsa stabilità, instabilità, oscillazioni,…) non sono soddisfacenti. Realizziamo allora il seguente schema in anello chiuso (retroazione)



Quindi (es. caso continuo)

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad u = Kx + v \qquad \Rightarrow \dot{x} = Ax + BKx + Bv = (A + BK)x + Bv$$

Cioè:

- la matrice di transizione di stato A diventa $(A+BK)$
- la matrice B degli ingressi rimane B

Il problema è quindi di determinare K in modo che il polinomio caratteristico $\Delta_{A+BK}(\lambda)$ sia accettabile (cioè i suoi autovalori diano la dinamica desiderata).

Nota: nei sistemi a un solo ingresso, k è un vettore.

Teorema di Wonham (1967)

Il polinomio caratteristico $\Delta_{A+Bk}(\lambda)$ del sistema reazionato può essere fissato ad arbitrio se e solo se il sistema (A, B) è completamente raggiungibile.

- Gli algoritmi per il calcolo della matrice k del controllore fanno uso esplicito della matrice di raggiungibilità di Kalman $R = (B \;\; AB \; \ldots \; A^{n-1}B)$

- Questi algoritmi sono in generale molto complessi (vedi, ad es., A. Locatelli "Teoria della Regolazione" CLUP, 1975) tranne che nel caso dei sistemi con un solo ingresso (m=1)

- Il teorema di Wonham può essere usato per determinare il minimo numero possibile di ingressi di un sistema da progettare (cioè il minimo numero di ingressi che garantisce l'esistenza di un controllore stabilizzante)

CALCOLO DI k (sistemi a un solo ingresso, b è un vettore)

Due possibilità:

a) si determinano gli autovalori di (A+bk) in funzione degli elementi incogniti k_i del vettore k; si uguagliano agli autovalori desiderati ottenendo un sistema di equazioni da risolvere.

b) si segue la procedura seguente:

- si definiscono gli autovalori desiderati λ^*_i e si calcola con essi il polinomio caratteristico desiderato

  $$\Delta_{A+BK}(\lambda) = (\lambda - \lambda^*_1)(\lambda - \lambda^*_2)\ldots(\lambda - \lambda^*_n) = \lambda^n + a_1^*\lambda^{n-1} + \ldots + a_n^*$$

- si calcolano i coefficienti a_i del polinomio caratteristico attuale $\Delta_A(\lambda)$
- si calcola la matrice R (*matrice di raggiungibilità di Kalman*)
  $R = | b \;\; Ab \;\; A^2b \ldots A^{n-1}b|$ (n righe x n colonne)
  e la sua inversa R^{-1}
  (se l'inversa non esiste la procedura si arresta e significa che non è in generale possibile fissare ad arbitrio gli autovalori del sistema)
- si riscrive il sistema dinamico nella forma

  $$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  coefficienti del polinomio caratteristico

  e la relativa matrice R_c
  $R_c = | b_c \;\; A_c b_c \;\; A_c^2 b_c \ldots A_c^{n-1} b_c|$

- si calcola il vettore k come

$$k = |(a_n - a_n^*) \quad (a_{n-1} - a_{n-1}^*) \quad \ldots \quad (a_1 - a_1^*)| \, R_c R^{-1}$$

Implementazione in Excel

Legge di controllo

INDIRIZZO =$G$4*D9+$H$4*E9+B10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3		Sistema										
4		-2	1		2	K	-1	-2				
5	A	0	0,5	b	1		Legge di controllo					
6												
7		step	0,01			A+bk	-4	-3				
8	time	v	u	x_1	x_2		-1	-1,5				
9	0	1	0,000	2,000	1,000							
10	0,01	1	=$G$4*D9+	1,970	1,005	**Lambda1**	**-0,61**		Tequil	8,14		
11	0,02	1	-2,980	1,881	0,980	**Lambda2**	**-4,89**					
12	0,03	1	-2,841	1,793	0,955							
13	0,04	1	-2,703	1,710	0,931							
14	0,05	1	-2,573	1,631	0,909							
15	0,06	1	-2,449	1,556	0,888							
16	0,07	1	-2,332	1,485	0,868							
17	0,08	1	-2,221	1,417	0,849							
18	0,09	1	-2,115	1,353	0,831							
19	0,1	1	-2,015	1,292	0,814							
20	0,11	1	-1,920	1,234	0,798							
21	0,12	1	-1,830	1,179	0,783							
22	0,13	1	-1,744	1,127	0,768							
23	0,14	1	-1,663	1,077	0,755							
24	0,15	1	-1,586	1,030	0,742							
25	0,16	1	-1,513	0,985	0,730							
26	0,17	1	-1,444	0,942	0,718							
27	0,18	1	-1,378	0,901	0,707							
28	0,19	1	-1,316	0,863	0,697							
29	0,2	1	-1,257	0,826	0,687							
30	0,21	1	-1,201	0,792	0,678							
31	0,22	1	-1,148	0,758	0,670							
32	0,23	1	-1,098	0,727	0,662							
33	0,24	1	-1,050	0,697	0,654							
34	0,25	1	-1,005	0,669	0,647