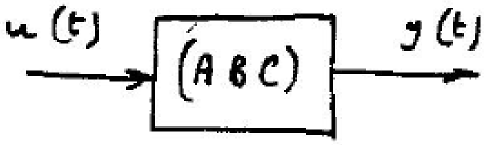
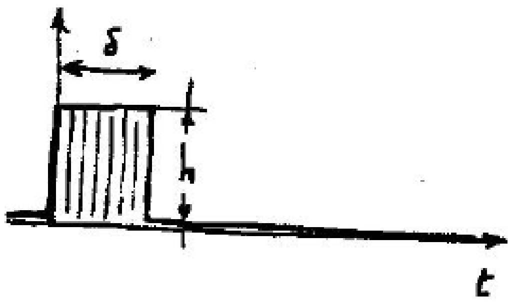
Calcolo del Movimento Forzato

Risposta all'impulso



sistema

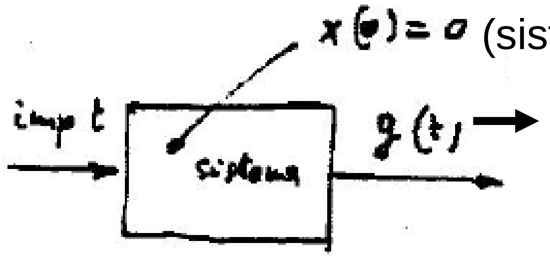


hδ = area dell'onda rettangolare

hδ =1   δ→ 0   h→ ∞   impulso

imp t = impulso unitario all'istante 0

A imp(t-b) = impulso di valore A all'istante b



(sistema inizialmente a riposo)

Risposta all'impulso

$$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\xi)} B u(\xi) d\xi \qquad (x(0) = 0)$$

C=c^T (una sola uscita)

B=b (un solo ingresso)

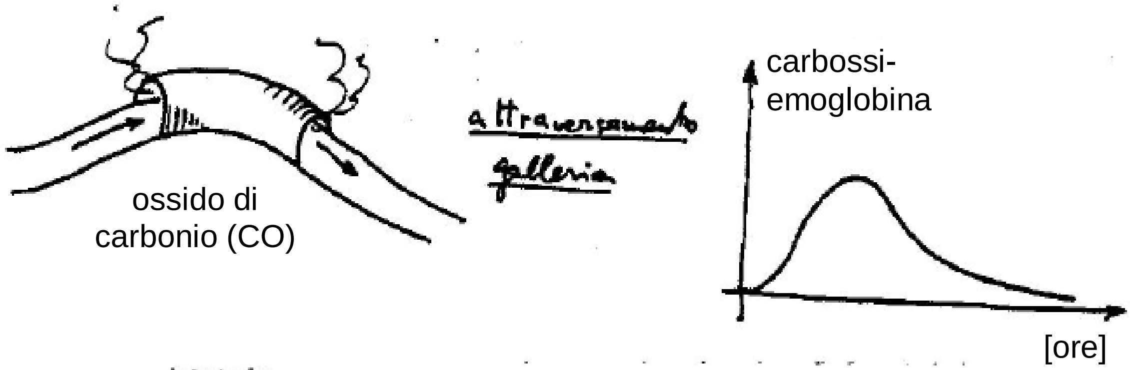
u(ξ) = imp t

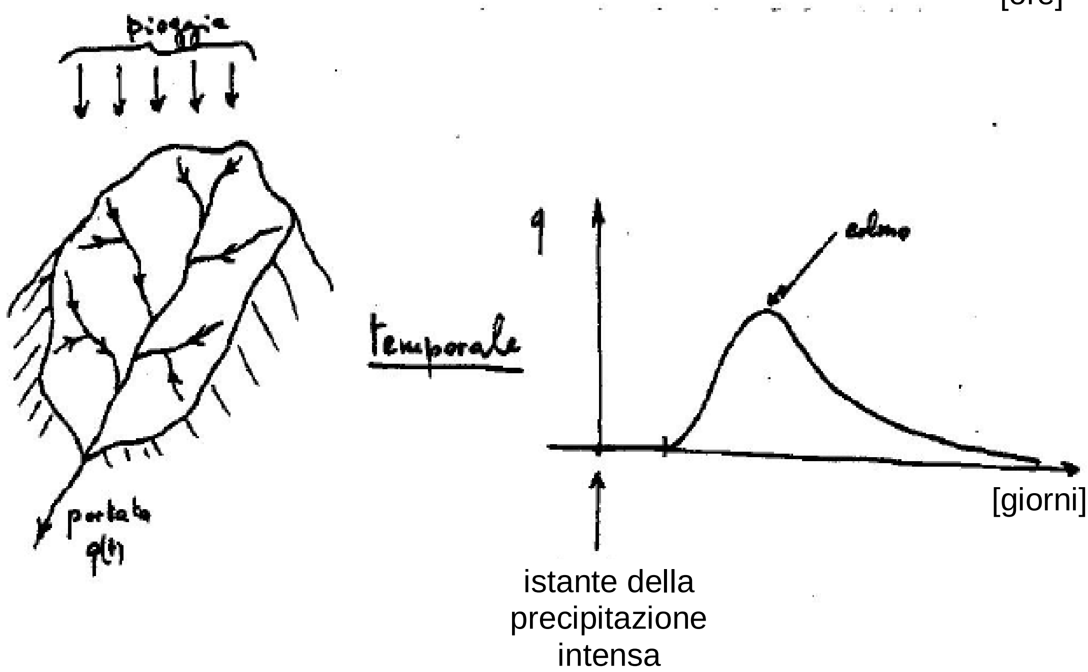
$$g(t) = c^T \int_0^t e^{A(t-\xi)} b \; imp \;\; \xi d\xi = c^T \int_0^{0^+} e^{A(t-\xi)} b \; imp \;\; \xi d\xi$$

$$g(t) = c^T e^{At} b$$ **risposta all'impulso**

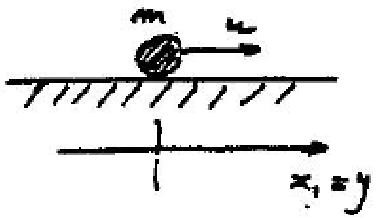
Esempi


vuoto d'aria
s
t
[secondi]


ossido di
carbonio (CO)
attraversamento
galleria
carbossi-
emoglobina
[ore]


pioggia
portata
q(t)
temporale
q
colmo
[giorni]
istante della
precipitazione
intensa

Esempio di calcolo (forza = massa x accelerazione)

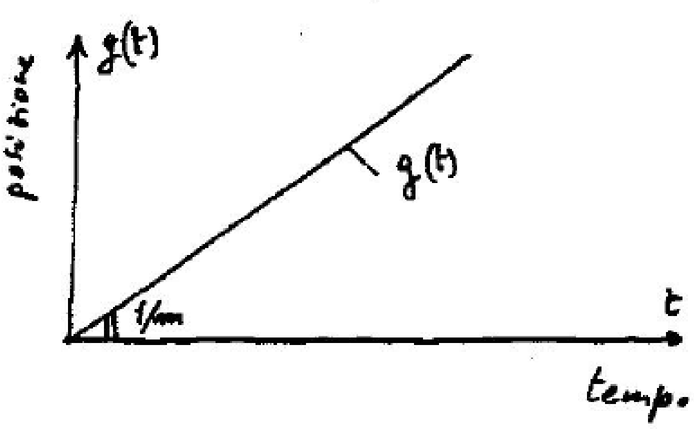


$$x(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$ pallina ferma nell'origine

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{pmatrix}\qquad c^T=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$$

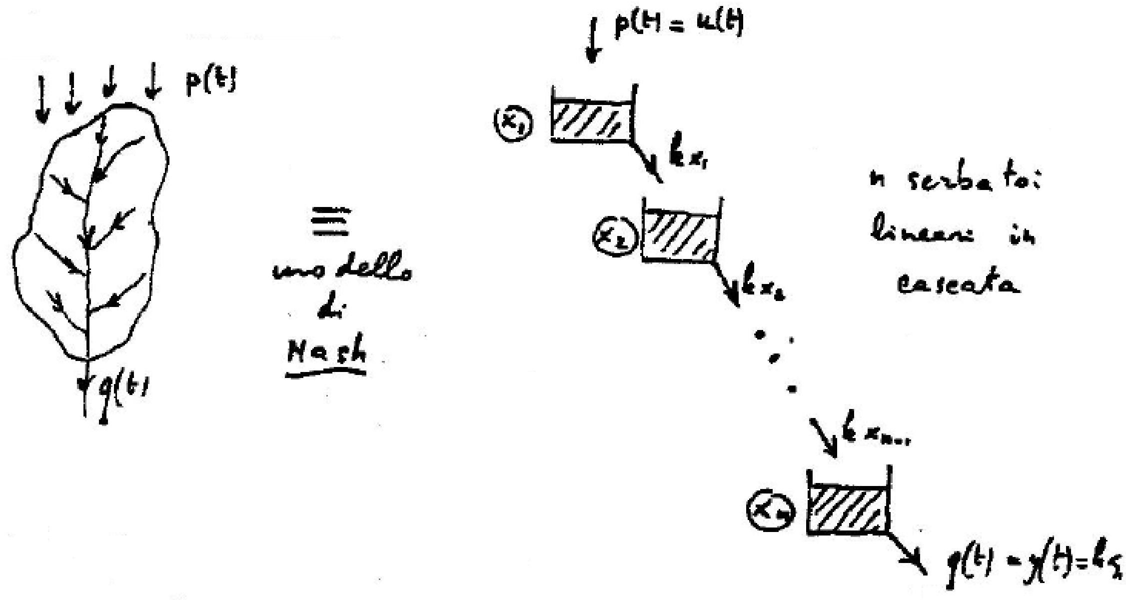
$$e^{At}=I+At+A^2\frac{t^2}{2!}+\ldots=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & t\\0 & 0\end{pmatrix}+zero=\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$y(t)=c^Te^{At}b=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{pmatrix}=\frac{t}{m}$$



Scopriamo così che, subito un impulso, la pallina si muove a velocità costante.

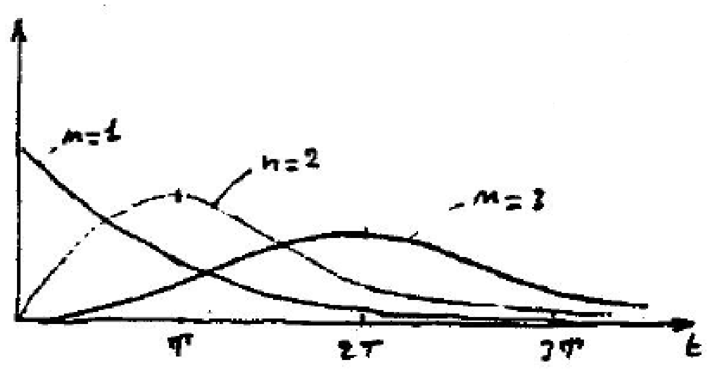
Esempio di calcolo



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - kx_1 \\ \dot{x}_2 = kx_1 - kx_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = kx_{n-1} - kx_n \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k & -k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = kx_n \qquad c^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

$$y(t) = c^T e^{At} b = ... = \frac{1}{T(n-1)!} \left(\frac{t}{T} \right)^{n-1} e^{-\frac{t}{T}} \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{k} = \text{cost. di tempo}$$



t* = tempo del colmo =
= (n-1)T

Questi diagrammi sono noti in idrologia come <u>idrogramma unitario</u>

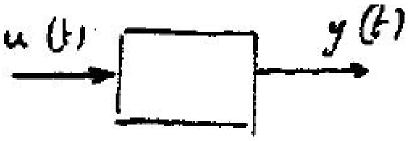
Conclusione

$$y(t)=\int_0^t c^T e^{A(t-\xi)} b u(\xi) d\xi \qquad (x(0)=0)$$

$$g(t)=c^T e^{At} b \qquad g(t-\xi)=c^T e^{A(t-\xi)} b$$

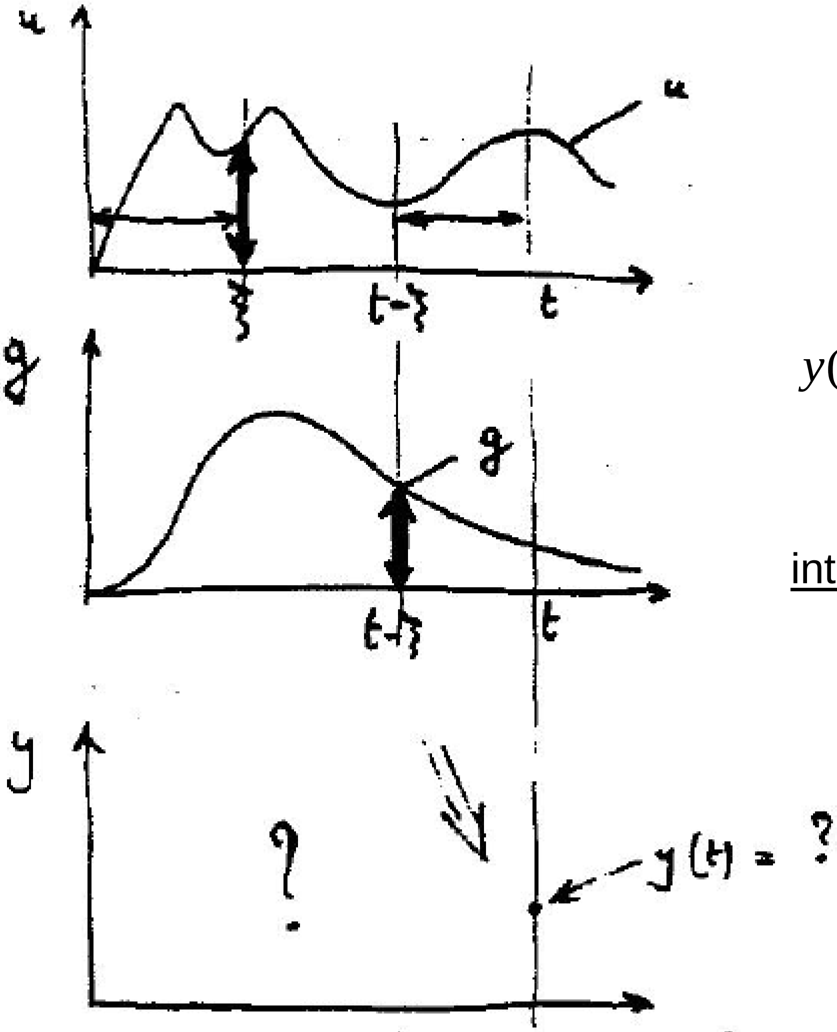
Risposta all'impulso

Ingresso generico



$$=\int_0^t g(t-\xi)u(\xi)d\xi$$

In generale, quindi, abbiamo:



$$y(t)=\int_0^t g(t-\xi)u(\xi)d\xi$$

integrale di convoluzione

In pratica la risposta può essere calcolata come la somma di tante risposte a singoli impulsi che rappresentano un breve intervallo temporale dell'ingresso.