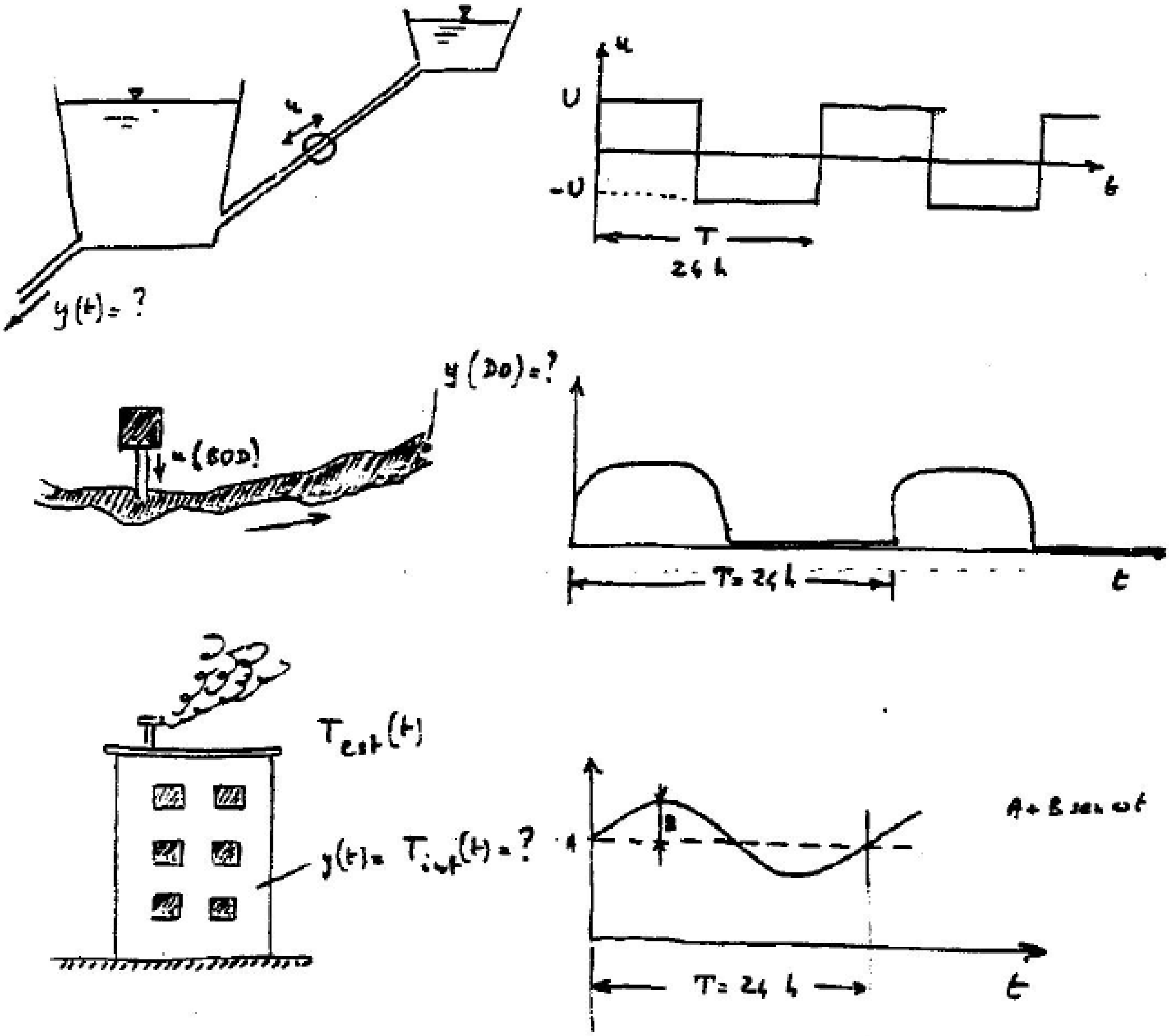
Risposta in frequenza

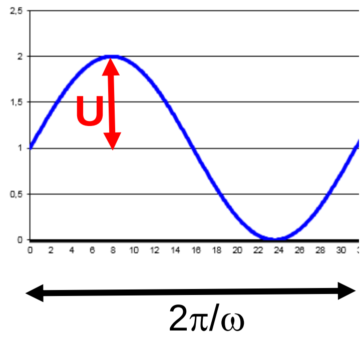
In molti casi l'ingresso di un sistema dinamico è una funzione periodica del tempo.

u(t) = u(t+T)   per ogni t   (T = periodo)



Ipotesi:

- Sistema lineare asintoticamente stabile
- Una sola uscita y(t)
- Ingresso sinusoidale u(t)=U sen(ωt)

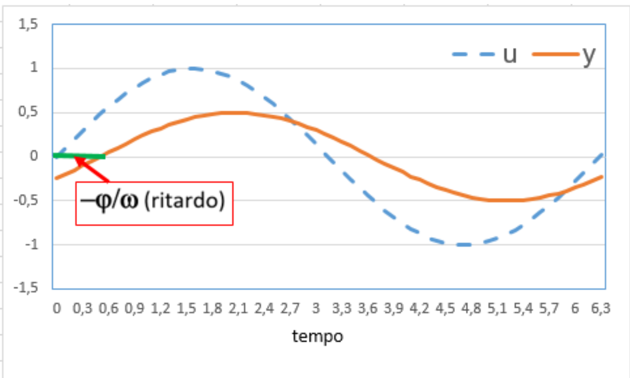


U = ampiezza ω = pulsazione; 2π/ω = periodo; ω/2π = frequenza

y(t) = ?

Si può dimostrare che Y(t) tende asintoticamente ad una sinusoide, in generale sfasata rispetto all'ingresso, ma della stessa frequenza:

$$y(t) \rightarrow Y sen(\omega t + \varphi)$$



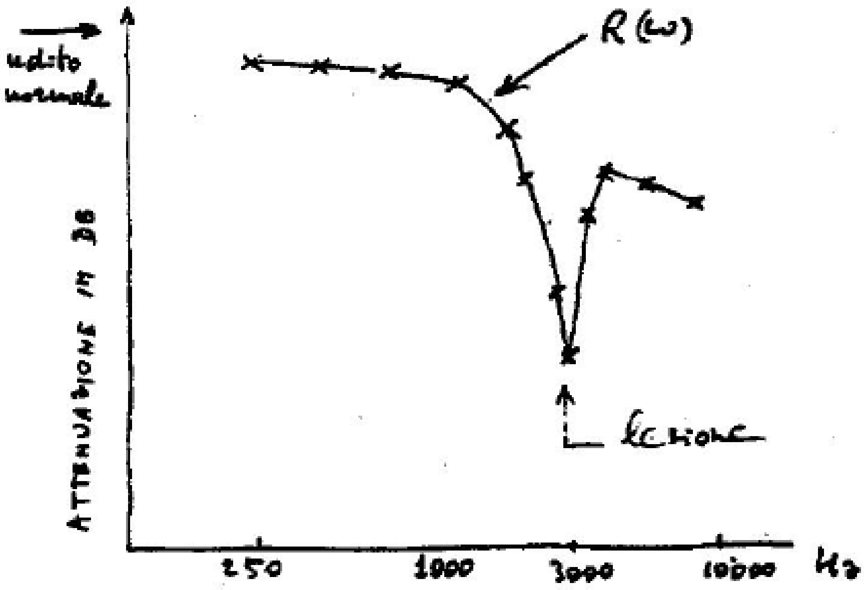
Caso classico: l'uscita è in "ritardo", cioè φ è negativo

Inoltre, φ dipende solo da ω e Y è proporzionale a U.

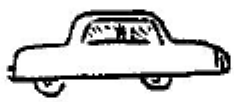
$$\begin{cases} Y = R(\omega)U \\ \varphi = \varphi(\omega) \end{cases} \qquad \left[R(\omega), \varphi(\omega)\right] \triangleq \text{ risposta in frequenza}$$

Sul piano formale la risposta in frequenza è quindi una coppia di funzioni [$R(\omega),\varphi(\omega)$].

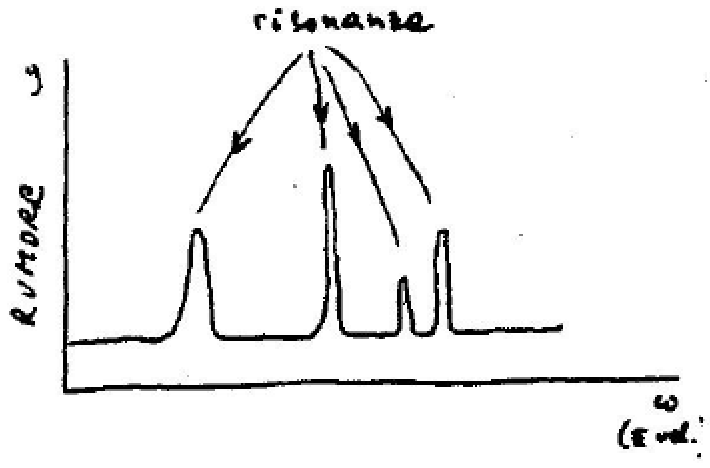
Spesso di queste due funzioni interessa di più la R(ω) che rappresenta il rapporto tra ampiezza di uscita e di ingresso.



<u>audiogramma</u>



a diverse velocità si hanno sollecitazioni meccaniche di diversa frequenza



Come si usa la risposta in frequenza

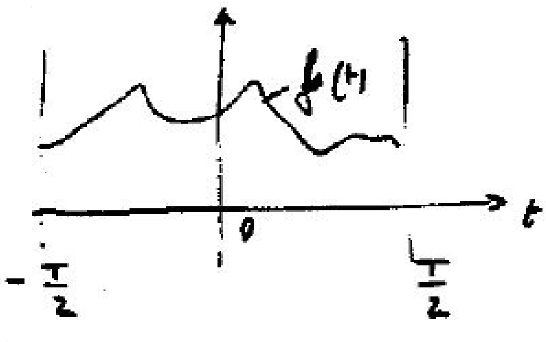
Se il segnale d'ingresso *u(t)* è semplicemente periodico (di periodo t) si deve scomporlo in somma di termini sinusoidali (Fourier)

$$u(t) = \sum U_i sen(\omega_i t + \psi_i)$$

e poi calcolare per ognuno di essi Y_i e φ_i e quindi sommare tutti i contributi di uscita.

$$y(t) = \sum R(\omega_i) U_i sen(\omega_i t + \Psi_i)$$

Fourier

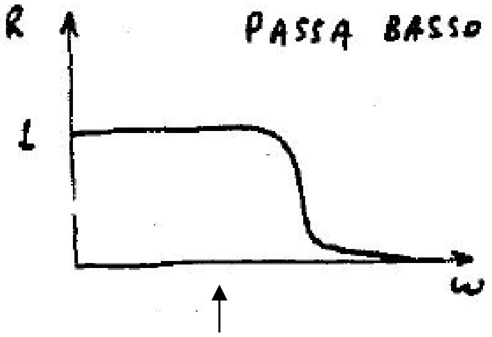


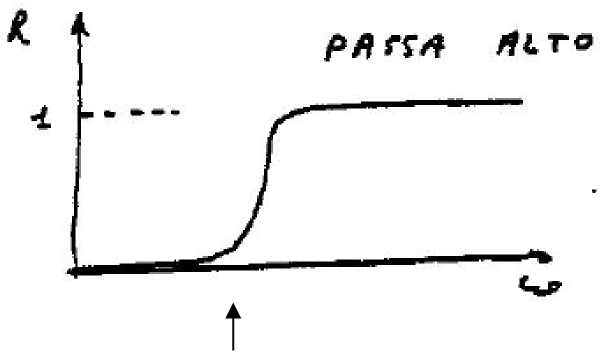
$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \qquad a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) sen\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt$$

La risposta in frequenza [$R(\omega),\varphi(\omega)$] permette di interpretare i sistemi dinamici come veri e propri filtri:



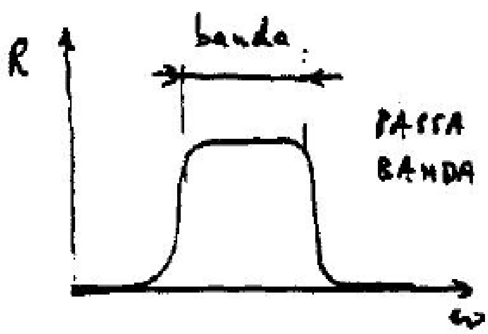


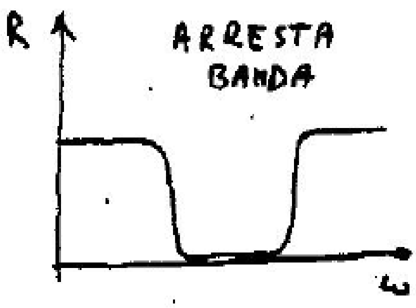
Filtro passa – basso

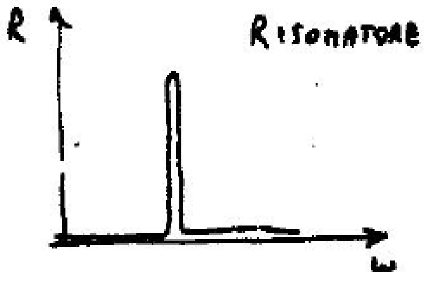
Le sinusoidi a bassa frequenza si ritrovano nell'uscita mentre quelle ad alta frequenza vengono attenuate (filtrate)

Filtro passa – alto

In questo caso vengono filtrate le componenti a bassa frequenza del segnale d'ingresso







CALCOLO DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Anche la coppia di funzioni $R(\omega)$, $\phi(\omega)$, come la risposta all'impulso, è rilevabile sperimentalmente.
Basta sottoporre il sistema a ingressi sinusoidali di pulsazioni ω diverse, attendere l'esaurimento del transitorio e calcolare il rapporto Y/U e il ritardo.

Si può tuttavia calcolare la risposta in frequenza anche per via analitica.

Si dimostra infatti che, nel caso di sistemi SISO:

matrice identità n x n

$$R(\omega) = \left| c(i\omega I - A)^{-1} b \right|$$

unità immaginaria

e

$$\phi(\omega) = arg\underbrace{\left[c(i\omega I - A)^{-1} b \right]}$$

per $\omega = \underline{\omega}$ è un numero complesso
per ω qualsiasi è una funzione complessa.

Es. : **sist SISO del I° ord.** (es. serbatoio) A= [-0.2] b=[1] c=[0.2]

ingresso: sinusoide di periodo 1 ora (ω= 2π/3600= 0,0017):

$$\mathbf{u(t)= 5\ sen(0.0017\ t)}$$

uscita, a transitorio esaurito:

$$y(t)=Y\ sen(0.0017\ t + \phi) = 5\ R(0.0017)\ sen(0.0017\ t + \phi(0.0017))$$

$$R(0.0017)= |0.2(0.0017\ i +0.2)^{-1}\cdot 1| \approx 1$$

$$\phi(0.0017)= arg[0.2(0.0017\ i +0.2)^{-1}\cdot 1] = -arctan(0.0085) \approx -0.5°$$

$$\mathbf{y(t)=5\ sen(0.0017\ t - 0.5°)}$$