MOVIMENTO DEI SISTEMI LINEARI

Nel caso di **sistemi lineari discreti**:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \qquad (1)$$

Quindi, partendo da x_0 e u_0 possiamo calcolare x_1 come:

$x_1 = Ax_0 + Bu_0$ e proseguendo

$x_2 = Ax_1 + bu_1 = A(Ax_0 + Bu_0) + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1$

$x_3 = Ax_2 + Bu_2 = A(A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1) + Bu_2 =$
$= A^3x_0 + A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2$

Per un t qualsiasi, risulta:

$$x_t = \underbrace{A^t x_0}_{\text{movimento libero}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{t} A^{i-1} B u_{t-1}}_{\text{movimento forzato}} \qquad (2)$$

Per il calcolo di x_t la (1) è più comoda da usare della (2).

Per la stabilità (esaurimento dell'effetto di una perturbazione dello stato) occorre che il movimento libero $\rightarrow$ 0 per t $\rightarrow \infty$.

Nel caso discreto, la matrice A^t può anche azzerarsi per qualche valore q di t. Se questo capita la matrice si dice nilpotente e il sistema si dice a memoria finita perché “dimentica” lo stato iniziale in al più q transizioni. Se una matrice è nilpotente si ha:

$$A^t = 0 \quad \forall t \geq q^* \qquad \text{e} \qquad q^* \leq n \text{ (ordine della matrice)}$$

Analogamente, nei **sistemi continui**

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x(0)}_{x_l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\xi)}Bu(\zeta)d\zeta}_{x_f(t)}$$

Formula di Lagrange

Dove e^{At} è definito da:

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} \;\; \cdots\cdots$$

Per la stabilità, occorre che $e^{At} \to 0$ per $t \to \infty$.

Nei **sistemi lineari**, la stabilità è una proprietà della matrice A. Inoltre,

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

e $x_l(t)$ e $x_f(t)$ sono lineari rispettivamente in $x(0)$ e $u(t)$. Poiché nei sistemi lineari $y(t) = Cx(t)$, abbiamo anche:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Quindi, se si moltiplicano per α lo stato iniziale e l'ingresso, si moltiplica per α anche l'uscita. Oppure, se si sommano due stati iniziali e due funzioni di ingresso, si ottiene la somma delle uscite.

Vale cioè il <u>principio di sovrapposizione degli effetti.</u>

Stabilità dei sistemi lineari continui

La condizione necessaria e sufficiente per *<u>l'asintotica stabilità</u>* è:

$$\boxed{\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i}$$

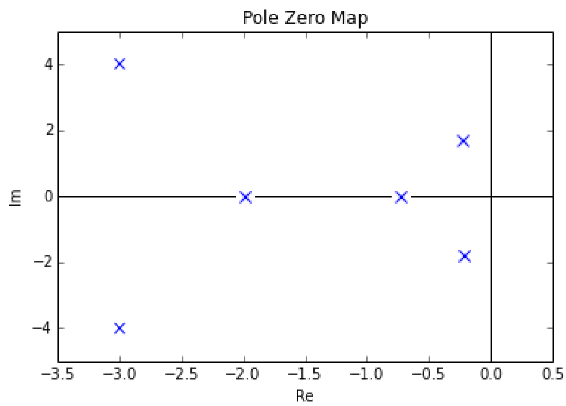
Dove λ_i , i =1,…,n sono gli <u>autovalori</u> della matrice A, cioè le soluzioni dell'<u>equazione caratteristica</u>:

$$\underline{\Delta}_A(\lambda) = \mathbf{det}(\boldsymbol{\lambda I\text{-}A}) = 0$$

$$\det(\lambda I\text{-}A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n$$

a_i $(i = 1,2,\ldots n)$ = coefficienti del <u>polinomio caratteristico</u>

Gli autovalori si chiamano anche <u>poli.</u>



Poli nel semispazio sinistro

$\Updownarrow$

Asintotica stabilità del sistema

Un autovalore (o due complessi coniugati) con parte reale nulla (e tutti gli altri con Re(λ)<0) determinano una situazione di **semplice stabilità** (il movimento perturbato non ritorna a quello originario, ma nemmeno si allontana indefinitamente). Se ci sono più autovalori nulli si può avere semplice stabilità o instabilità (occorre un'analisi più approfondita).

Autovalori e movimento

In pratica si dimostra che il movimento di un sistema lineare continuo (che sappiamo essere la composizione di esponenziali – vedi eq. di Lagrange), si può scrivere come

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{a}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{a}_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\mathbf{a}_n e^{\lambda_n t}$$

nella quale gli $\mathbf{a}_i$ sono gli **autovettori** del sistema (soluzioni non nulle di $Ax=\lambda x$) e i coefficienti c_i dipendono dallo stato iniziale.

Si comprende quindi che tra i coefficienti $e^{\lambda_i t}$ conterà sempre di più quello che corrisponde all'autovalore λ_i più elevato.

- Se il sistema è asintoticamente stabile, quello più elevato corrisponderà alla componente del movimento che si esaurisce più lentamente,
- Se è instabile, corrisponderà alla componente che va all'infinito più rapidamente.

Asintoticamente quindi, il movimento tenderà ad allinearsi all'autovettore corrispondente all'autovalore più elevato, che è perciò detto **autovalore dominante** (così come il relativo autovettore). *Il sistema sarà quindi approssimabile con un sistema del I° (o II°) ordine in cui il solo autovalore (o la coppia di complessi coniugati) è quello dominante.*

L'inverso dell'opposto (della parte reale) dell'autovalore dominante è detto "**costante di tempo dominante**".

Gli autovalori complessi rappresentano movimenti oscillatori (sen(t) e cos(t)).

Poiché tutti i movimenti sono esponenziali, è possibile anche valutare a priori la loro evoluzione.

Si può quindi dire che, in qualunque sistema lineare, dopo

circa 5 volte la costante di tempo dominante

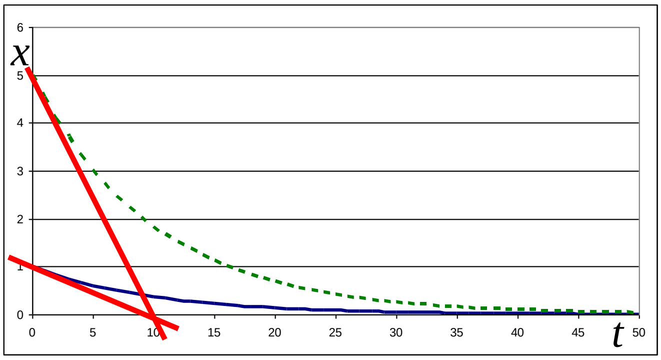
il transitorio si esaurisce, cioè, in sistemi stabili, si raggiunge l'equilibrio (±1% circa dello scarto iniziale).

Esempio 1

$$\dot{x} = \lambda x \quad x(t) = e^{\lambda t} x(0) \quad \dot{x}(0) = \lambda$$

T costante di tempo = -1/λ

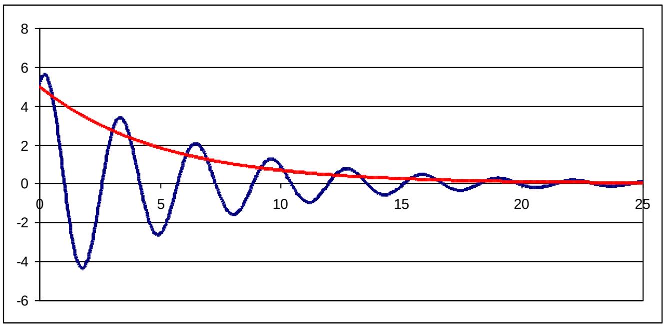
Intersezione della tangente nell'origine con l'asse dei tempi = T



$\lambda = -0{,}1$

T $= 10$

$T_{esaurimento} = 50$

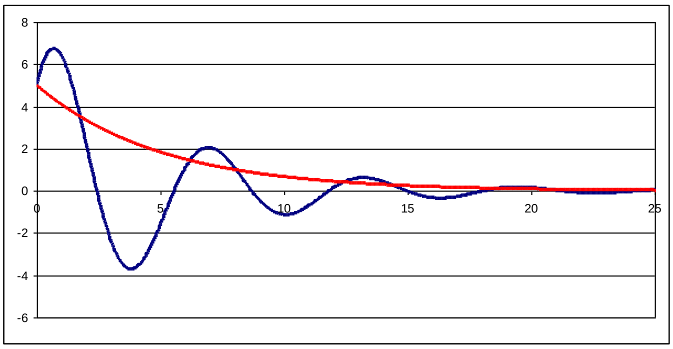


$\lambda_{1,2} = -0{,}2 \pm 2i$

T $= 5$

$T_{esaurimento} = 25$

Il periodo delle oscillazioni è legato al valore della parte immaginaria



$\lambda_{1,2} = -0{,}2 \pm i$

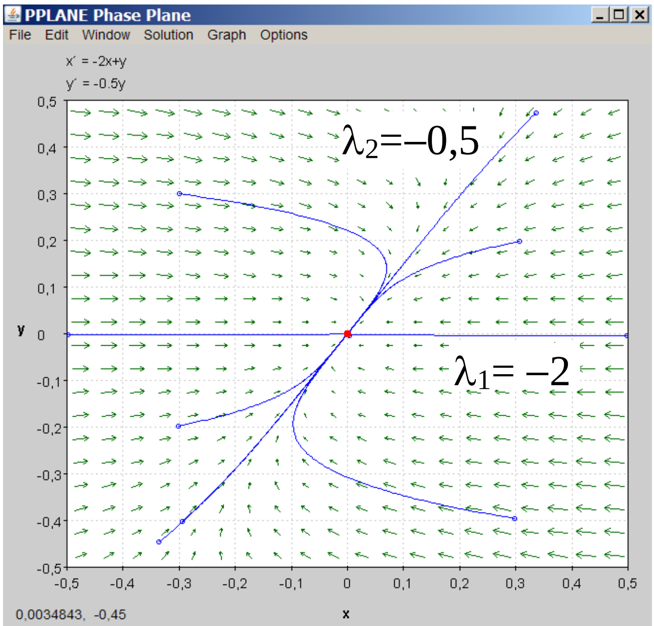
T $= 5$

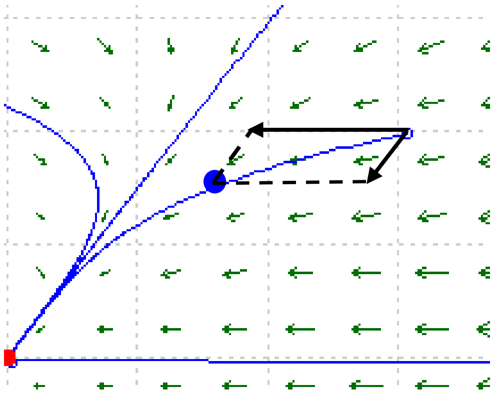
$T_{esaurimento} = 25$

Esempio 2

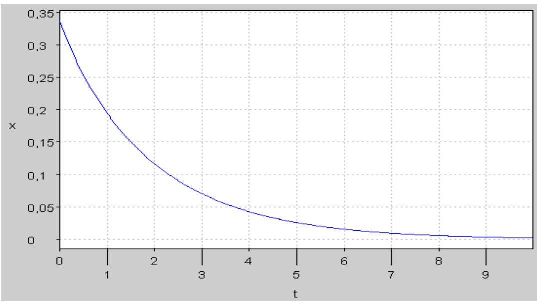
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -0{,}5x_2 \end{cases} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -0{,}5$$

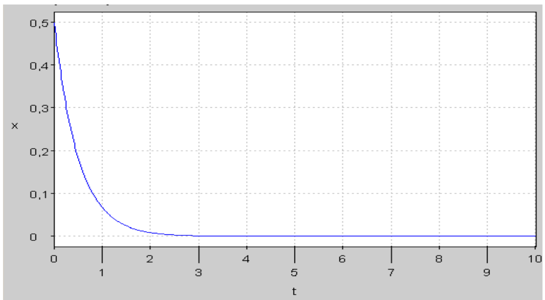
Autovalore dominante -0,5, costante di tempo dominante = 2





Movimento della variabile x_1





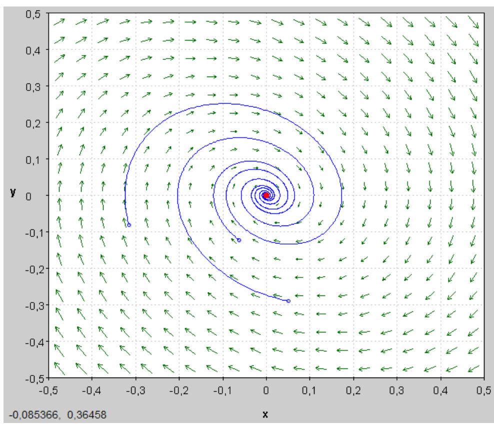
Sull'autovettore dominante sull'altro autovettore

Esempio 3

Fuoco

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -1{,}04x_1 - 0{,}4x_2 \end{cases}$$

Autovalori (e autovettori) complessi.

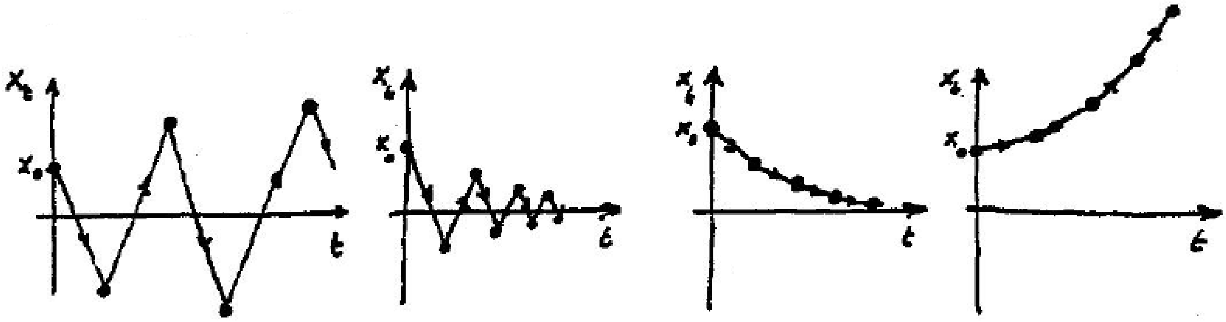


Stabilità dei sistemi lineari discreti

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \qquad\qquad x_t = A^t x_0 \; + \text{ mov. forz.}$$

$$\text{asintotica stabilità} \;\longleftrightarrow\; A^t \rightarrow 0 \text{ (matrice nulla)}$$

Se A è uno scalare (sistema del primo ordine) abbiamo i seguenti casi:

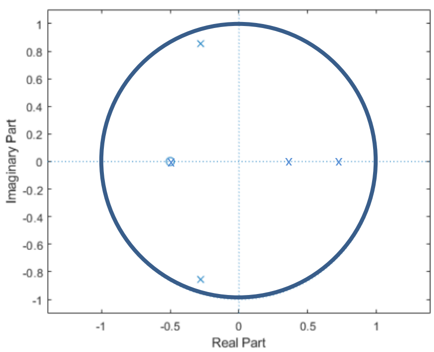


A< -1	-1<A<0	0< A< 1	A>1
instabilità	stabilità	stabilità	instabilità

Quindi la condizione di asintotica stabilità è **|A| <1**

In generale si ha:

$$\boxed{\text{asintotica stabilità} \;\longleftrightarrow\; |\lambda_i| < 1 \;\forall \text{i}}$$



Poli nel cerchio unitario

$\Updownarrow$

Asintotica stabilità del sistema

La semplice stabilità corrisponde a un autovalore con $|\lambda|$=1.

Autovalore e costante di tempo dominante

Anche nei sistemi discreti l'autovalore dominante λ_d è quello più grande. Quindi, per i sistemi stabili, è il più vicino al limite di stabilità, cioè con modulo più vicino a 1.

La costante di tempo dominante è invece: (log è il logaritmo naturale)

$$\boxed{T_d = -\frac{1}{\log|\lambda_d|}}$$

Esempio: (Fibonacci)

Analizziamo il problema di Fibonacci

x_1(t) = n° coppie conigli giovani

x_2(t) = n° coppie conigli vecchi

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda i - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\det(\lambda i - A) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Un autovalore è in modulo maggiore di uno → instabilità.

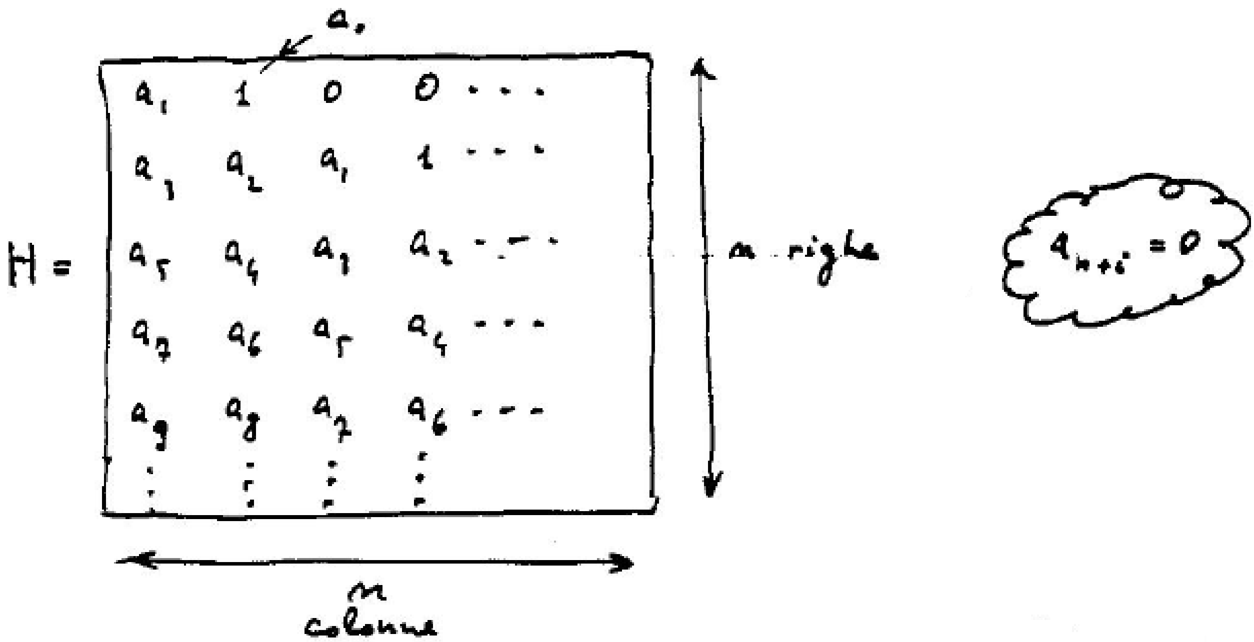
Metodi per la determinazione del segno degli autovalori

Una volta determinati gli a_i non è strettamente necessario calcolare gli autovalori λ_i perché basta verificare se:

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall \mathrm{i}$$

Per questo sono stati sviluppati dei test diversi.

Test di Hurwitz (1895)



$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall \mathrm{i} \quad \longleftrightarrow \quad D_1 = a_1 \ , D_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathrm{D}_3 = \det\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} , \ .... \ , \text{tutti positivi}$$

Calcolo degli autovalori: ALCUNI CASI IMPORTANTI

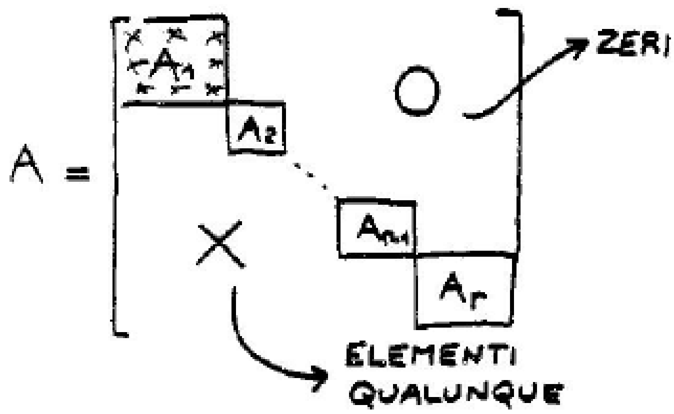
- **A triangolare**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono gli elementi della diagonale: $\lambda_i = a_{ii}$, i=1,2,…,n

(caso particolare: A diagonale)

- **A triangolare "a blocchi"**:



$A_1, A_2, \ldots, A_r$ sono SOTTOMATRICI QUADRATE

In questo caso:

$$\{\text{autovalori di A}\} = \{\text{autovalori di } A_1\} \cup \{\text{autovalori di } A_2\} \cup \ldots . \{\text{autovalori di } A_r\}$$

In alcuni casi, si può dire qualcosa sulla STABILITA'/INSTABILITA' del sistema senza dover calcolare gli autovalori.

In generale, per ogni matrice A:

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

$$tr\ A \triangleq a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

Allora, nei sistemi continui:

1. A asint. stab. $\longrightarrow$ tr A < 0 quindi:

$$\text{tr A} \geq 0 \longrightarrow \text{A non asint. stab. } \{\exists \text{ un } \lambda_i \text{ con Re}(\lambda_i) \geq 0\}$$

$$\text{tr A} > 0 \longrightarrow \text{A instabile } \{\exists \text{ un } \lambda_i \text{ con Re}(\lambda_i) > 0\}$$

Analogamente, nei sistemi discreti, se tr A > n (ordine del sistema), il sistema è instabile.

2. ***Solo per sistemi del 2° ordine*** (n=2)

$$A \text{ asnt.stabile} \leftrightarrow \begin{cases} \text{continui} \begin{pmatrix} \text{tr } A < 0 \\ \det A > 0 \end{pmatrix} \\ \text{discreti} \begin{cases} |\text{tr } A| < 1 + \det A \\ |\det A| < 1 \end{cases} \end{cases}$$

3. Inoltre, si dimostra che:

$$\text{A asint. stabile} \longrightarrow \begin{cases} \text{tutti i coefficienti} \\ \text{del polinomio caratteristico} \\ \Delta_A(\lambda) \text{ sono} > 0 \end{cases}$$