

# VALIDAZIONE

Spesso si preferisce valutare il modello di simulazione ottenuto dalla taratura (anche) sotto punti di vista diversi da quello già utilizzato (minimizzazione della somma degli scarti al quadrato, ...).

Indicatori comunemente utilizzati sono:

- Errore medio (in % della media dei valori misurati)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum (y - y_{sim})}{\sum y} \cdot 100 \quad y = \text{valori misurati}; \quad y_{sim} = \text{valori calcolati}$$

- Errore massimo (in % della media dei valori misurati)

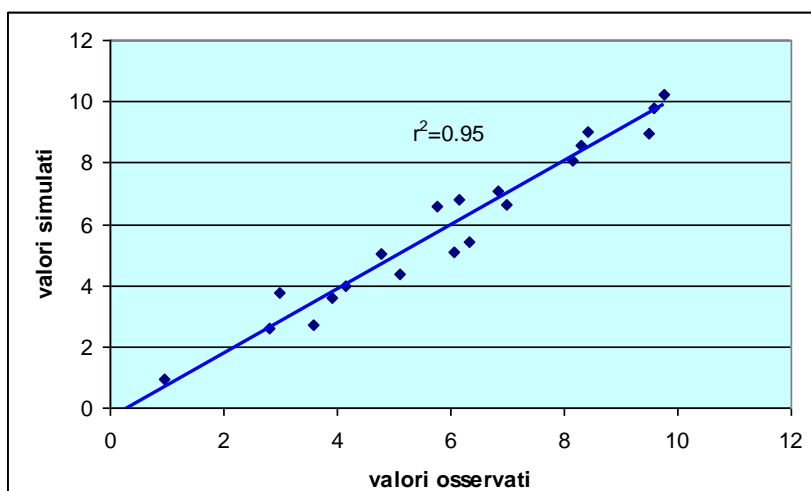
$$\varepsilon_{max} = \frac{N \cdot \max(y - y_{sim})}{\sum y} \cdot 100 \quad N = \text{numero dati disponibili}$$

- Correlazione vero-simulato

$$r = \frac{\sum (y_{sim} - \bar{y}_{sim})(y - \bar{y})}{\sqrt{(\sum (y_{sim} - \bar{y}_{sim})^2)(\sum (y - \bar{y})^2)}}$$

- Varianza spiegata  $\sum (y_{sim} - \bar{y})^2 / \sum (y - \bar{y})^2 = r^2$

- Grafico della dispersione delle coppie vero-simulato attorno alla bisettrice



- Robustezza (analisi di sensitività)

- ...

## Analisi di sensitività

Si valuta quanto il movimento del sistema è sensibile alla variazione dei parametri.

In effetti,  $x(t)=\varphi(x(t_0),u(\cdot), t_0,t)$  dipende anche dal valore dai parametri, cioè  $x(p,t)=\varphi(x(t_0),u(\cdot), t_0,t, p)$ , dove  $p$  è il vettore dei parametri.

Vogliamo ora determinare la sensitività del movimento ai parametri, cioè:

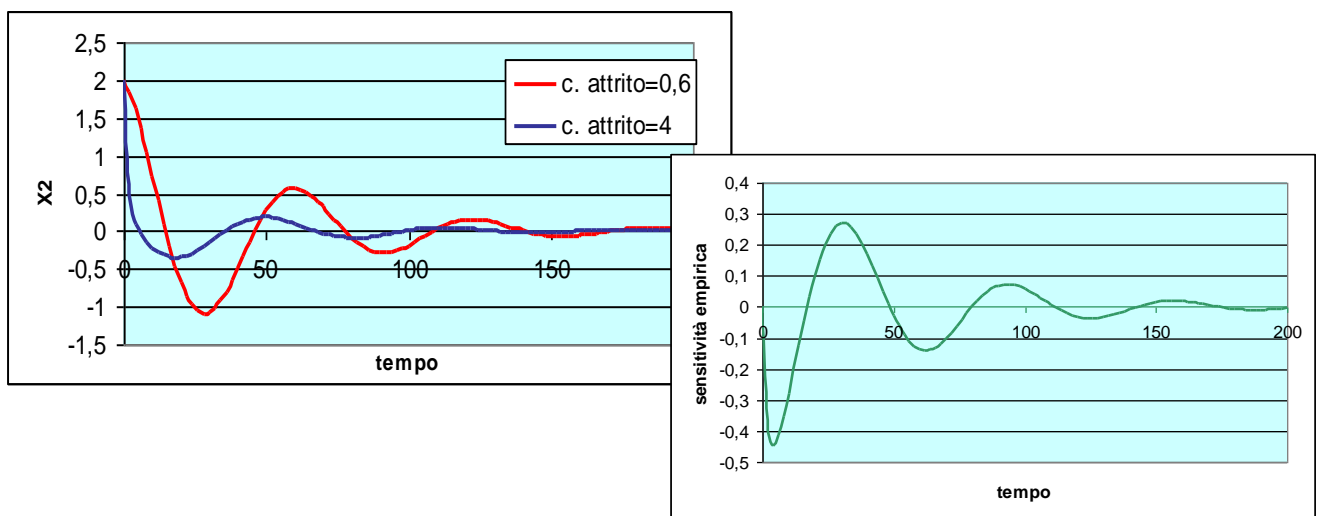
$$\left. \frac{dx(p,t)}{dp} \right|_{p^*} \quad \text{dove } p^* \text{ rappresenta il valore } \textit{nominale} \text{ (= di riferimento) del parametro.}$$

Il calcolo è molto complesso dal punto di vista analitico e quindi lo si effettua generalmente via simulazione valutando la differenza:

$$x(p^* + \delta p, t) - x(p^*, t) \quad \text{oppure} \quad [x(p^* + \delta p, t) - x(p^*, t)] / \delta p$$

ATTENZIONE:

- ciò implica molte simulazioni quando i parametri sono molti,
- devono essere provati sia valori positivi, che negativi di  $\delta p$
- valori significativi di  $\delta p$  possono essere fissati solo in base a conoscenze esterne sul sistema
- l'effetto di  $\delta p$  dipende dal tempo e non rimane necessariamente lo stesso durante il movimento.



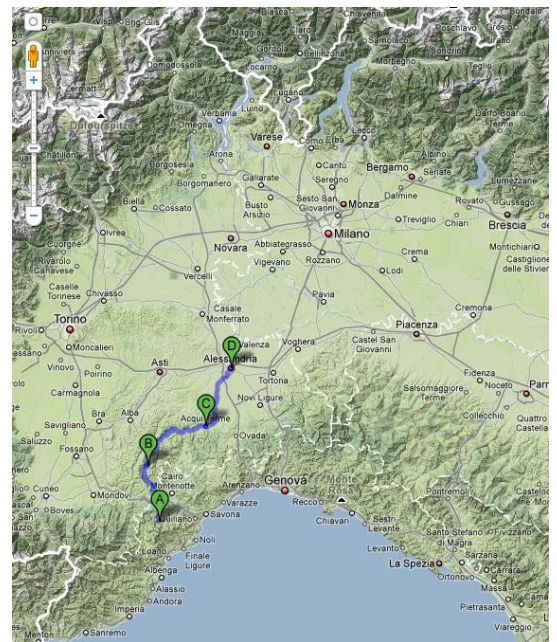
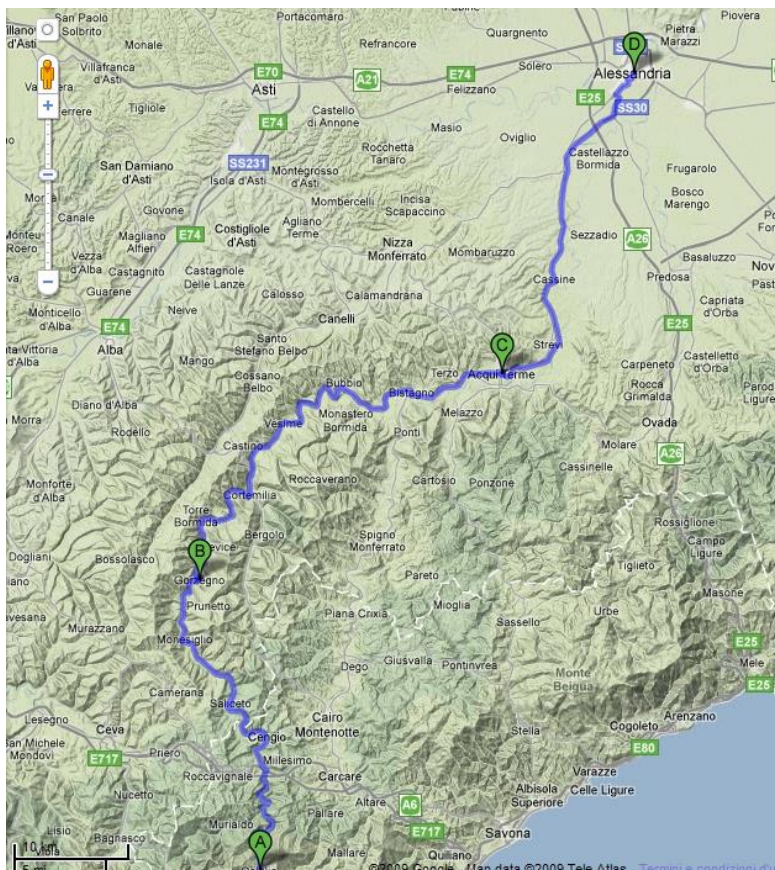
# TARATURA - CASO DI STUDIO:

## Il modello del fiume Bormida

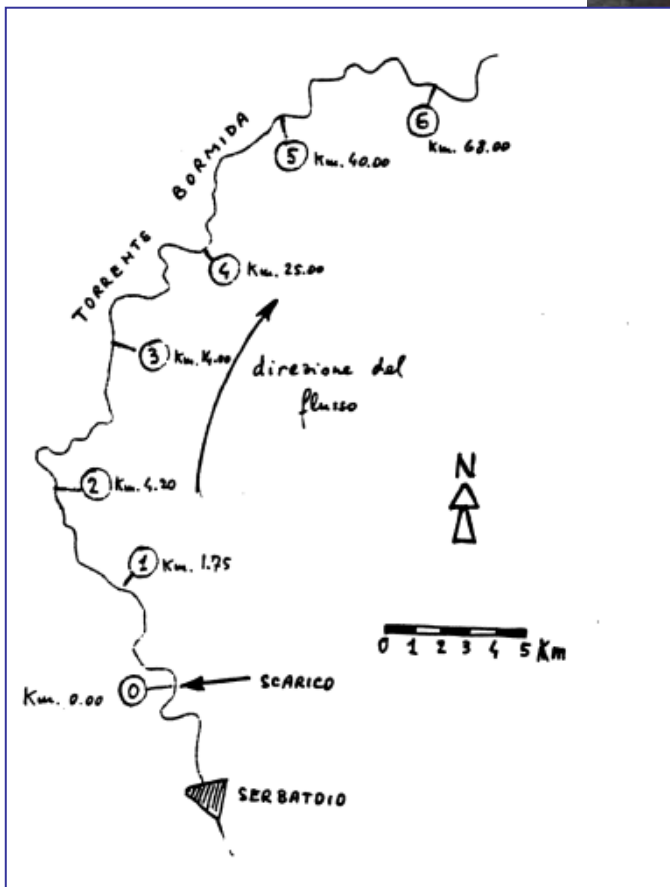
Vedi: Rinaldi, Soncini-Sessa, Stehfest, Tamura; Modelling and Control of River Quality, Mc-Graw Hill, 1979, [Capitolo 5](#)



Bormida	
lunghezza	154 km
portata media	40 m <sup>3</sup> /s
area del bacino	2.609 km <sup>2</sup>
quota alla sorgente	800 m s.l.m.
foce	Tanaro
regioni	Liguria, Piemonte



## Un problema di inquinamento di vecchia data



Sono disponibili dati di BOD e DO misurati, seguendo il flusso, in 6 stazioni in diverse condizioni di portata e temperatura.

Station number Distance (km)	0	1	2	3	4	5	6	Flow rate (10 <sup>3</sup> m <sup>3</sup> /day)	Water Temperature (°C)	
	0.00	1.75	4.20	14.00	25.00	40.00	68.00		Average	Range
Regime										
1	196.0	180.0	200.0	118.0	64.0	38.0	10.0	55	17.5	4.2
	2.5	3.0	0.0	4.5	5.5	6.5	9.0			
2	149.0	118.0	120.0	92.0	72.0	58.0	24.0	60	9.0	5.1
	4.0	4.5	3.0	5.5	9.0	9.5	9.5			
	222.0	220.0	162.0	126.0	110.0	66.0	40.0	125	0.5	5.0
	5.0	0.0	1.0	3.0	5.0	6.5	10.5			
4	116.0	105.0	105.0	84.0	70.0	44.0	38.0	100	19.0	3.0
	3.0	3.5	2.0	5.0	5.5	6.0	7.5			
5	155.0	160.0	125.0	78.0	46.0	18.0	14.0	75	18.0	3.2
	1.5	0.0	1.5	3.5	4.5	5.5	7.0			
6	129.0	150.0	125.0	86.0	70.0	46.0	20.0	80	17.0	3.3
	3.0	3.5	2.0	5.0	6.0	6.0	6.5			
7	86.0	70.0	68.0	56.0	50.0	34.0	24.0	225	5.0	2.5
	8.0	0.0	2.0	6.0	7.0	9.5	12.0			
8	171.0	160.0	145.0	72.0	68.0	30.0	16.0	100	25.0	3.7
	1.5	0.0	0.0	1.2	2.2	3.6	5.8			
9	205.0	200.0	200.0	104.0	98.0	60.0	58.0	55	10.0	8.9
	1.0	0.0	0.0	4.0	6.0	6.0	7.0			
10	101.0	100.0	90.0	70.0	68.0	58.0	22.0	200	1.8	3.5
	7.0	5.0	4.0	4.0	8.0	9.0	9.0			
11	84.0	80.0	80.0	60.0	50.0	36.0	24.0	250	3.5	2.4
	8.0	3.0	6.0	8.0	10.0	10.5	11.0			
12	163.0	150.0	135.0	100.0	85.0	62.0	50.0	125	11.8	2.4
	4.5	0.0	0.5	4.0	5.0	6.0	8.0			
13	74.0	80.0	70.0	60.0	44.0	46.0	22.0	200	16.0	2.5
	5.5	5.5	3.0	6.0	7.0	7.5	8.0			
14	106.0	90.0	85.0	70.0	55.0	40.0	20.0	200	11.5	5.5
	7.5	3.0	3.0	6.0	7.0	9.0	9.5			
15	90.0	75.0	80.0	40.0	30.0	20.0	12.0	150	16.0	6.0
	6.0	5.5	2.5	5.0	7.0	8.5	9.0			

BOD (mg/l)

DO (mg/l)

### Un possibile modello: Dobbin's

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dB}{dx} = \frac{-k_2(T, Q)}{v(Q)} B \\ \frac{dD}{dx} = \frac{k_1(T)}{v(Q)} B - \frac{k_2(T, Q)}{v(Q)} D - \frac{k_c(Q)}{v(Q)} \end{array} \right.$$

ossidazione e sedimentazione  
 ossidazione  
 re-areazione  
 respirazione algale  
 deficit di ossigeno ( $c_s - DO$ )

## PARAMETRI

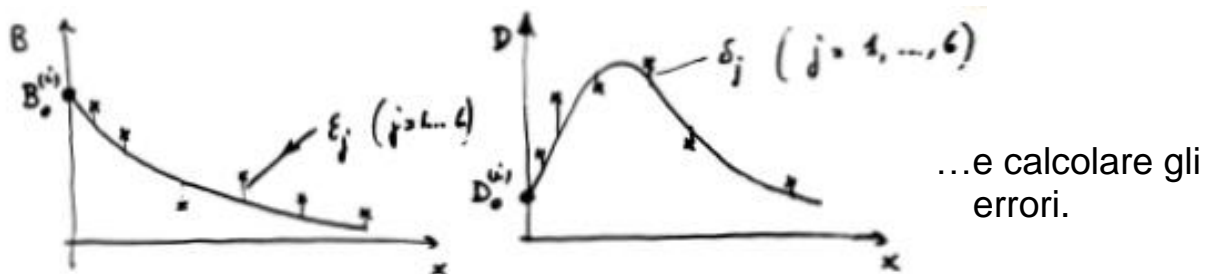
$$\left. \begin{aligned}
 k_1(T, Q) &= \vartheta_1 \vartheta_2^{(\tau - 20)} + \vartheta_3 Q^{\vartheta_4} \\
 k_2(T, Q) &= \vartheta_5 Q^{\vartheta_6} \vartheta_7^{(\tau - 20)} \\
 k_3(T) &= \vartheta_1 \vartheta_2^{(\tau - 20)} \\
 k_4(Q) &= \vartheta_8 Q^{-1}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l}
 \text{I parametri da} \\
 \text{stimare sono quindi} \\
 \text{in realtà 8:} \\
 \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_8)
 \end{array}$$

La procedura:

(1) si stimano, per ogni regime (Q e T fissi), i "parametri"  $k_i$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dB}{d\tau} = -k_1 B \\
 \frac{dD}{d\tau} = k_2 B - k_3 D - k_4
 \end{array} \right. \quad \tau = \text{tempo di flusso}$$

Fissato un valore per i parametri  $k_i$ , possiamo simulare il sistema...



Ma come vogliamo tener conto degli errori?

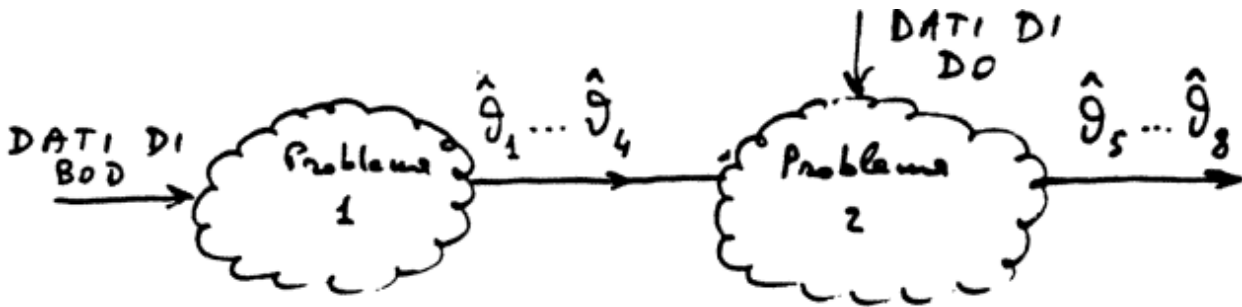
- i valori di BOD sono dell'ordine delle centinaia
- i valori di DO sono dell'ordine delle decine

se sommiamo i quadrati, conteranno solo gli errori del BOD e avremo un modello che non replica bene l'ossigeno.

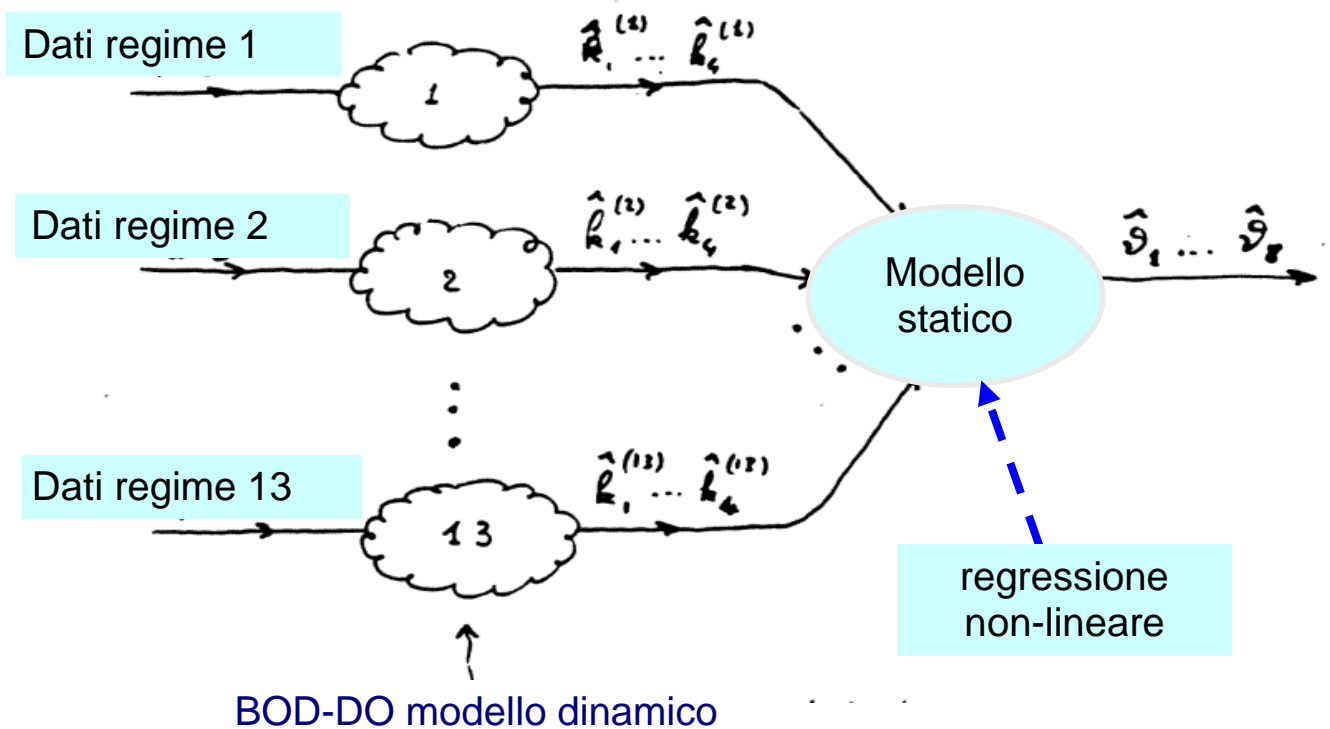
Pesiamo quindi gli errori per renderli simili:

$$E = \sum_j^{\text{stations}} \left( \lambda \varepsilon_j^2 + (1 - \lambda) \delta_j^2 \right)$$

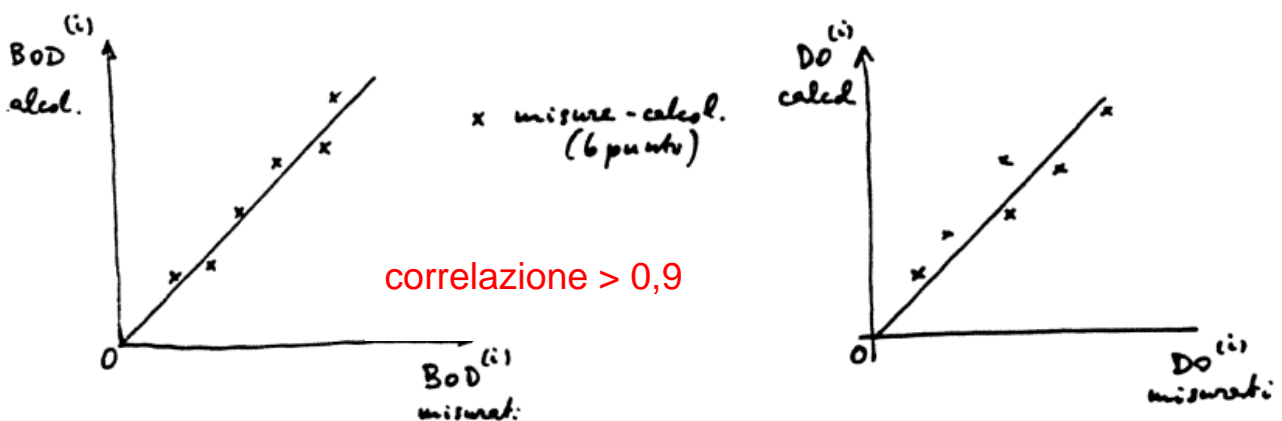
(2) dividiamo le due equazioni (nella prima compaiono solo dati di BOD e 4 parametri) e risolviamo due problemi in cascata



(3) stimiamo i parametri z con una regressione non lineare



## RISULTATI



Tuttavia:

$$k_1^{(i)} \approx k_3^{(i)}$$

$\forall i$  la sedimentazione è irrilevante

$$k_4^{(i)} \approx 0$$

$\forall i$  la respirazione algale è trascurabile

Il modello di Streeter-Phelps è sufficiente!

### VALIDAZIONE

$$\left. \begin{aligned} k_1(T, Q) &= \vartheta_1 \vartheta_2^{(T-20)} + \vartheta_3 Q^{\vartheta_4} \\ k_2(T) &= \vartheta_1 \vartheta_2^{(T-20)} \\ k_2(T, Q) &= \vartheta_5 Q^{\vartheta_6} \vartheta_7^{(T-20)} \end{aligned} \right\} + k_1 \approx k_2 \Rightarrow k_1 = \vartheta_1 \vartheta_2^{(T-20)}$$

$$\rightarrow k_2/k_1 = \frac{\vartheta_5}{\vartheta_1} Q^{\vartheta_6} \left(\frac{\vartheta_7}{\vartheta_2}\right)^{T-20}$$

$k_2/k_1$  è una curva esponenziale in Q

