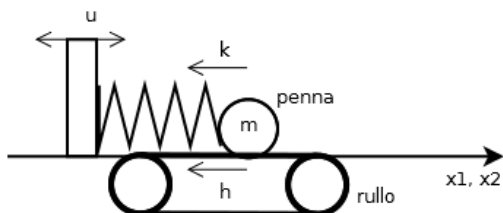


Esercizi di Formulazione

1 IL SISMOGRAFO

1.1 IL PROBLEMA



Si formuli un modello che rappresenti il fun-

zionamento di un sismografo perfettamente orizzontale come quello rappresentato in figura.

Il modello deve permettere di calcolare l'ampiezza delle tracce disegnate sulla carta a seguito di un'oscillazione impressa sulla struttura ospitante il sismografo stesso.

1.2 LA SOLUZIONE

I modelli meccanici come il sismografo possono essere interpretati come sistemi dinamici tempo-continui utilizzando i simboli dell'analisi dei sistemi per rappresentare le leggi che ne governano il funzionamento.

Per convenzione, si introduce una coppia di variabili di stato (posizione, x_1 , e velocità, x_2) per ogni massa indipendente con cui si può schematizzare il meccanismo.

Nello schema in figura è evidenziata l'unica massa m sottoposta alla forza di richiamo di una molla (di costante elastica k , che dipende dal materiale della molla e dal numero e dalla forma delle spire) e all'attrito tra sfera e piano (caratterizzato da una costante h che dipende sostanzialmente dai materiali impiegati).

Il modello per calcolare la posizione della sfera (y), data la posizione dell'edificio nel quale si trova il sismografo (u), può essere allora formulato come segue, scegliendo convenzionalmente come direzione positiva degli spostamenti e delle forze quella verso destra, e ricordando:

- il legame tra spostamento (s), velocità (v) e accelerazione (a):

$$\frac{ds}{dt} = v \text{ e } \frac{dv}{dt} = a$$

- la legge di Newton ($a = \sum F_i/m$);

- la legge di Hook ($F_e = ks$);
- e ipotizzando che l'attrito volvente esercitato tra sfera del pennino e carta del rullo sia proporzionale alla velocità di scorrimento ($F_a = hv$)

trascurando inoltre la lunghezza della molla a riposo, si ottiene:

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = x_2 [= v] \quad (1.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = -\frac{k(x_1 - u) + hx_2}{m} [= a]$$

$$y = x_1 \quad (1.2)$$

Le (1.1), ottenute effettuando il bilancio tra le forze esercitate sulla massa, rappresentano la transizione di stato del sistema (essendo tempo-continuo si tratta di equazioni differenziali), mentre la (1.2) ne costituisce la trasformazione di uscita.

Come si può notare, oltre alle variabili di stato (x_1 e x_2), di ingresso (u) e di uscita (y), sono presenti solo dei parametri (m, h, k).

Tutte le equazioni scritte sono inoltre lineari, si può quindi formulare il modello anche in forma matriciale:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

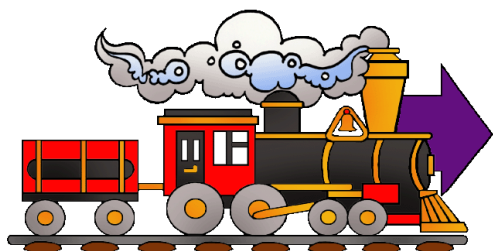
dove

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dal punto di vista della classificazione, infine, il modello ottenuto è a parametri concentrati (l'unica variabile indipendente è il tempo), deterministico (le sue realizzazioni sono sempre uguali a se stesse non essendo presenti componenti aleatorie che ne disturbino la dinamica), invariante (struttura e parametri sono costanti nel tempo), proprio (l'ingresso non agisce direttamente sull'uscita), oltre ad essere lineare tempo-continuo di ordine 2.

2 IL TRENO

2.1 IL PROBLEMA



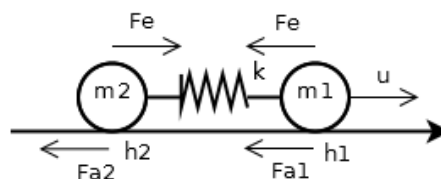
clipart-library.com/clipart/424527.htm

Si formuli un modello che rappresenti il funzionamento di una locomotiva che traina un vagone lungo binari perfettamente orizzontali come quello rappresentato in figura. Con il modello, ipotizzando che il giunto tra locomotiva e vagone si comporti come una molla, si vuole calcolare la posizione della locomotiva e la distanza tra locomotiva e vagone, in funzione della forza di trascinamento esercitata dalla locomotiva.

2.2 LA SOLUZIONE

Anche questo modello meccanico può essere rappresentato come un sistema dinamico tempo-continuo, introducendo in questo caso due coppie di variabili di stato (posizioni, x_1 e x_2 , e velocità, x_3 e x_4) rispettivamente per la massa della locomotiva (m_1) e del vagone (m_2).

Nello schema in figura, oltre alle masse, sono evidenziate le 2 forze di richiamo (che dipenderanno anche dalla costante elastica k) e gli attriti tra ruote e binario (caratterizzati dalle costanti h_1 e h_2).



Il modello per calcolare le due uscite (posizione della locomotiva, y_1 e distanza tra le due masse, y_2), data la forza trainante della locomotiva (u), può essere allora formulato come segue, ricordando le convenzioni, relazioni, ipotesi e leggi già utilizzate nell'esercizio precedente, diventa:

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{u - k(x_1 - x_2) - h_1 x_3}{m_1}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k(x_1 - x_2) - h_2 x_4}{m_2}$$

$$y_1 = x_1 \quad (2.2)$$

$$y_2 = x_1 - x_2$$

Anche in questo caso tutte le equazioni scritte sono lineari e quindi si può formulare il modello anche in forma matriciale:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

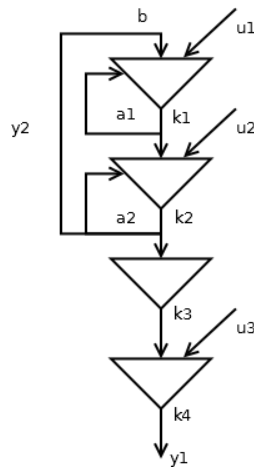
dove

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{h_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{h_2}{m_2} \end{bmatrix} & \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \implies \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dal punto di vista della classificazione, anche questo modello è a parametri concentrati, deterministico, invariante, proprio, lineare tempo-continuo. Rispetto al modello precedente cambia quindi solo l'ordine (4) e il numero di uscite (2).

3 IL VOMANO

3.1 IL PROBLEMA



Si formuli un modello che rappresenti il funzionamento del sistema idrico rappresentato in figura, dove i parametri a_1 , a_2 e b rappresentano percentuali delle quantità di acqua uscenti transitanti nei rispettivi tronchi.

Il modello, ipotizzando che la quantità di acqua defluente da un certo invaso sia direttamente proporzionale al volume in esso contenuto, deve permettere di calcolare: la quantità di acqua che esce dal sistema; quella che complessivamente viene ricircolata.

3.2 LA SOLUZIONE

Questo modello può essere rappresentato sia come un sistema dinamico tempo-continuo, in cui gli archi della rete rappresentano dei flussi, cioè delle portate, sia tempo-discreto, ma in questo caso gli archi rappresentano dei volumi.

Per la sua formulazione occorre introdurre una variabile di stato per ogni invaso presente (4), quindi le transizioni di stato rappresenteranno dei bilanci di massa in ciascun nodo

della rete.

Rispettando le ipotesi di proporzionalità indicate nella traccia, e scegliendo una formulazione tempo-discreta, le equazioni del modello, dopo alcune semplificazioni algebriche, diventano:

$$\begin{aligned}
 x_1(t+1) &= x_1(t) + [u_1(t) + a_1k_1x_1(t) + ba_2k_2x_2(t)] - k_1x_1(t) \\
 x_2(t+1) &= x_2(t) + [u_2(t) + k_1x_1(t)(1-a_1) + (1-b)a_2k_2x_2(t)] - k_2x_2(t) \\
 x_3(t+1) &= x_3(t) + [k_2x_2(t)(1-a_2)] - k_3x_3(t) \\
 x_4(t+1) &= x_4(t) + [u_3(t) + k_3x_3(t)] - k_4x_4(t)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= k_4x_4(t) \\
 y_2(t) &= a_1k_1x_1(t) + a_2k_2x_2(t)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

In ciascuna delle equazioni (3.1) i termini tra parentesi quadre rappresentano i volumi in ingresso nell'intervallo di tempo scelto. Come si vede, a differenza dei modelli tempo-continui, nei modelli tempo-discreti anche le equazioni di transizione di stato sono algebriche.

Tutte le equazioni scritte sono, anche in questo modello, lineari, e quindi lo si può formulare in forma matriciale:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \\
 \mathbf{y}_t &= \mathbf{C}\mathbf{x}_t
 \end{aligned}$$

dove:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - k_1(1 - a_1) & ba_2k_2 & 0 & 0 \\ k_1(1 - a_1) & 1 - k_2[1 - a_2(1 - b)] & 0 & 0 \\ 0 & k_2(1 - a_2) & 1 - k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 1 - k_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_4 \\ a_1k_1 & a_2k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dal punto di vista della classificazione, anche questo modello è a parametri concentrati, deterministico, invariante, proprio e lineare. Inoltre è tempo-discreto, di ordine 4, con 3 ingressi e 2 uscite.