Politecnico di Milano, Corso di Modellistica e Simulazione

Esercizi sull'ottimizzazione a molti obiettivi

1 caso discreto

1.1 il problema

Volete individuare le soluzioni progettuali efficienti tra quelle mostrate nella tabella, considerando rischio, rendimento e costo di ciascuna

progetto	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
rischio	40	20	20	50	55	25	35	20	30	45
rendimento	40	70	60	50	80	30	50	70	70	75
costo	105	90	100	85	80	95	75	95	80	80

1. quali sono le soluzioni immaginando che, dal punto di vista dell'importanza data agli obiettivi, esista la struttura preferenziale seguente: rischio $>>$ rendimento $>>$ costo?
2. cosa cambierebbe se la struttura fosse: rischio $\approx$ rendimento $>>$ costo?
3. e se gli obiettivi fossero tutti sullo stesso piano?

1.2 la soluzione

Per rispondere alla prima domanda, definendo con z la variabile decisionale discreta che corrisponde a uno dei progetti, occorre innestare una sequenza di ottimizzazioni rispettando la struttura *lessicografica* dell'importanza degli obiettivi, facendo variare di volta in volta l'obiettivo e l'insieme delle soluzioni ammissibili, a partire dall'insieme completo $\mathcal{Z} = \{A, B, \ldots, L\}$ ma considerando, nelle ottimizzazioni successive, solo le soluzioni ottime dal punto di vista dell'obiettivo precedente.
A partire da J_1=rischio, si procede quindi così

$$\min_{z\in\mathcal{Z}} J_1(z) = 20 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 \in \mathcal{Z}_1 = \{B, C, H\}$$

Poichè la soluzione non è unica, consideriamo ora J_2=rendimento, ottenendo

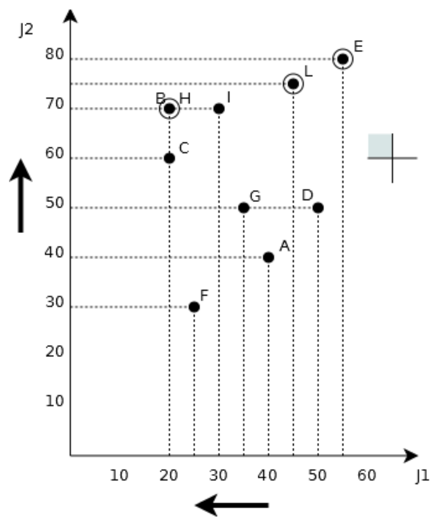
$$\max_{z\in\mathcal{Z}_1} J_2(z) = 70 \qquad \Rightarrow \qquad z_2 \in \mathcal{Z}_2 = \{B, H\}$$

Infine si consideri J_3=costo

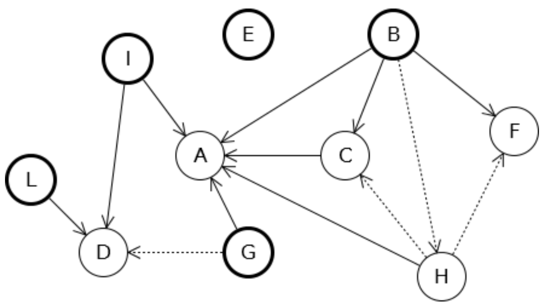
$$\min_{z \in \mathcal{Z}_2} J_3(z) = 90 \qquad \Rightarrow \qquad z^* \in \mathcal{Z}^* = \{B\}$$

In questo particolare caso, alla fine dell'ottimizzazione lessicografica, solo il progetto B risulta efficiente, ma l'univocità della soluzione non è sempre verificata.

Veniamo alla seconda domanda.
Se gli obiettivi in conflitto sono due, la ricerca delle soluzioni efficienti può avvenire nello spazio (piano) degli obiettivi, rappresentando ciascuna alternativa come un punto. Conviene anche evidenziare le direzioni di ottimalità rispetto agli assi.
Ci si avvale del *principio di efficienza paretiana*, secondo cui un'alternativa è *dominata* (*semidominata*) da un'altra, se è peggiore da tutti i punti di vista (da almeno uno e indifferente rispetto agli altri), e le alternative *efficienti* sono quelle non dominate. Nel caso bidimensionale, questo principio viene applicato facilmente attraverso un'analisi visiva, che consiste nell'applicare idealmente una sorta di mirino (come quello mostrato in figura) a ciascun punto del piano. Se nel riquadro grigio, definito sulla base della direzione di ottimalità degli obiettivi, ricade almeno un altro punto, il punto sul quale è applicato il mirino risulta dominato. -questa anlisi porta a individuare 4 alternative efficienti: B≡H, L, E. Si noti che I è semidominata, perchè è equivalente alla coppia B,H rispetto al rendimento ma ha un rischio peggiore, quindi va scartata.



Quando gli obiettivi in conflitto sono più di due, la soluzione grafica non è più conveniente.
In questi casi si ricorre all'analisi dei rapporti di dominanza attraverso confronti a coppie, e poi nella loro rappresentazione in un grafo. Partendo dall'alternativa A, si può verificare come essa sia dominata dalle alternative B, C, G, H e I, perchè ha prestazioni peggiori da tutti i punti di vista. Procedendo ora per tutte le alternative, si può ricostruire il grafo in cui i nodi corrispondono alle alternative e gli archi alla dominanza (continui) o semidominanza (tratteggiati) del nodo di partenza su quello di arrivo. Le alternative efficienti, B, E, G, I, L, corrispondono così ai nodi in cui non ci sono archi entranti, eventualmente anche privi di archi uscenti come nel caso dell'alternativa E.



2 CASO CONTINUO

2.1 IL PROBLEMA

Un'azienda deve decidere il mix di produzione scegliendo tra 2 prodotti, massimizzando il profitto e minimizzando al contempo le emissioni. Sono noti i valori unitari, e le materie prime necessarie alla loro produzione, riportati nella sottostante tabella.

prodotto	profitto	emissione	materiale 1	materiale 2	materiale 3
p1	1	3	2	1	1
p2	3	2	1	1	5

Sapendo che le disponibilità delle materie prime sono rispettivamente pari a 32, 20 e 72, individuare le soluzioni efficienti.

2.2 LA SOLUZIONE

Considerando due variabili di decisione, z_1 e z_2 corrispondenti alle quantità del prodotto p1 e p2, e gli obiettivi J_1 = profitto (da massimizzare) e J_2 = emissioni (da minimizzare), la formulazione di questo problema è la seguente

$$\max_{z_1,z_2} \quad z_1 + 3z_2 \quad \text{(profitto)}$$
$$\min_{z_1,z_2} \quad 3z_1 + 2z_2 \quad \text{(emissioni)}$$
$$\text{disponibilità:} \begin{cases} 2z_1 + z_2 \leq 32 & (1) \\ z_1 + z_2 \leq 20 & (2) \\ z_1 + 5z_2 \leq 72 & (3) \end{cases}$$
$$z_1, z_2 >= 0$$

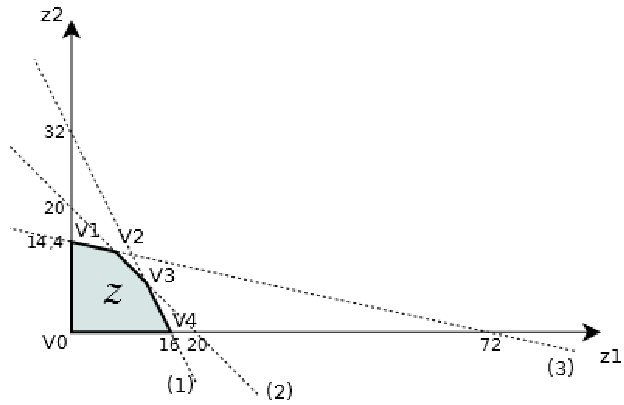
Obiettivi e vincoli sono lineari nelle variabili di decisione, quindi si tratta di un problema di *programmazione lineare a molti obiettivi* che può essere formulato anche attraverso le matrici, avendo l'accortezza di ricondursi a un'unica, arbitraria, direzione di ottimalità, moltiplicando eventualmente per -1 gli obiettivi ad essa discordi. In questo caso si ottiene

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \quad \mathbf{Rz}$$
$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} : \mathbf{Pz} <= \mathbf{q}, \mathbf{z} >= 0\}$$

dove

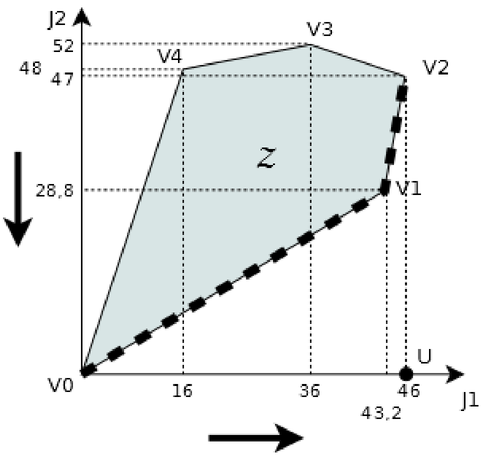
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 32 \\ 20 \\ 72 \end{bmatrix}$$

Poichè dimensionalmente sono 2 sia le variabili di decisione sia gli obiettivi, è possibile ottenere la soluzione per via grafica.
Occorre innanzitutto rappresentare l'insieme delle soluzioni ammissibili $\mathcal{Z}$ nel piano delle decisioni, esattamente come nel caso dei problemi ad un obiettivo, quindi considerando il primo quadrante del piano z_1, z_2 e le intersezioni tra i semipiani che rappresentano i vincoli.



V	z_1	z_2	J_1	J_2
0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	0,0	14,4	43,2	28,8
2	7,0	13,0	46,0	47,0
3	12,0	8,0	36,0	52,0
4	16,0	0,0	16,0	48,0

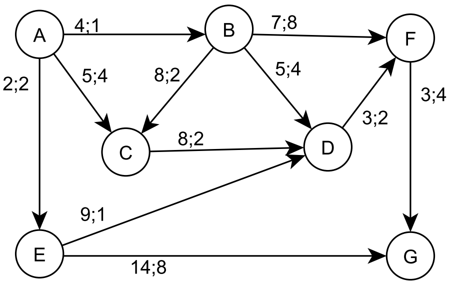
Ottenuto il poligono delle soluzioni ammissibili, occorre determinare le coordinate dei vertici compilando la solita tabella. Questa volta però occorrerà valutare due funzioni obiettivo in corrispondenza di ciascuno.
La soluzione continua proiettando $\mathcal{Z}$ nel piano degli obiettivi, proprio a partire dalle ultime due colonne della tabella che, in questo piano, ne rappresentano le coordinate.
Poichè anche le funzioni obiettivo sono lineari, i punti che si trovano lungo i lati nel piano delle decisioni, si troveranno sui lati anche proiettandoli nello spazio degli obiettivi. La proiezione dell'insieme $\mathcal{Z}$ allora consiste nel congiungere ordinatamente i vertici.
Per determinare le soluzioni efficienti, conviene indicare esplicitamente le direzioni di ottimalità lungo gli assi. Bisognerebbe ora ricorrere all'analisi con il *mirino* per tutti gli infiniti punti del poligono. Molto più semplicemente però ci si può aiutare individuando il cosiddetto *punto utopia* U, ovverosia quel punto che rappresenta l'ottimo degli obiettivi presi separatamente. Pur non essendo quasi mai un punto ammissibile (non appartiene infatti a $\mathcal{Z}$), fornisce un'indicazione molto importante sulle soluzioni efficienti, in quanto sono proprio quelli appartenenti ai lati del poligoono rivolti verso U. Nel caso in esame, in questo modo si possono individuare i punti sui lati V0-V1-V2 che costituiscono la cosiddetta *frontiera di Pareto*.



3 METODO DEI PESI

3.1 IL PROBLEMA

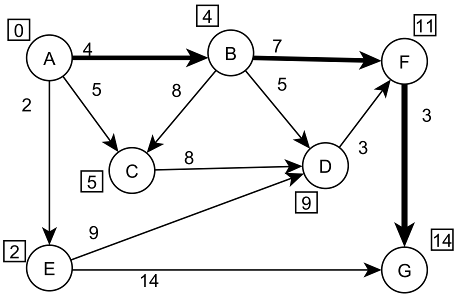
I possibili tragitti per andare da A a G sono mostrati in figura. Sugli archi la coppia di pesi corrisponde al costo e al tempo. Si individuino almeno 3 soluzioni paretiane a minimo costo e a minimo tempo.

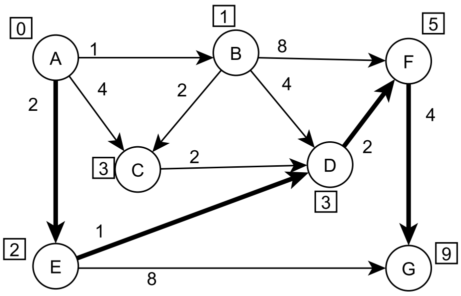


3.2 LA SOLUZIONE

Si tratta di un problema combinatorio, in particolare di cammino minimo, a due obiettivi entrambi da minimizzare, J_1 =costo e J_2 = tempo. Due soluzioni sono facilmente individuabili considerando un obiettivo alla volta, applicando il cosiddetto *criterio lessicografico*, con il quale si possono determinare gli estremi della frontiera di Pareto di un qualsiasi problema a molti obiettivi.

La soluzione a minimo costo la si ottiene applicando il metodo delle etichette al grafo che ha per pesi i primi valori di ogni coppia. Si individua in questo modo un valore ottimo dell'obiettivo J_1 = 14, corrispondente alla soluzione A→B→F→G.

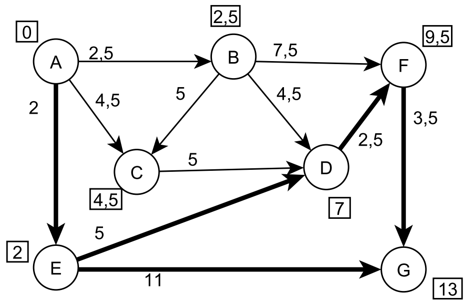




Utilizzando invece il secondo valore di ogni coppia di pesi, sempre col metodo delle etichette si può determinare la soluzione a minimo tempo. Si individua in questo modo un valore ottimo dell'obiettivo J_2 = 9, corrispondente alla soluzione A→E→D→F→G.

Il terzo punto efficiente può essere ora individuato utilizzando il *metodo dei pesi*, che consiste nel definire un obiettivo fittizio, attraverso una somma pesata, generalmente convessa, di quelli originali. Per questo, dopo aver eventualmente normalizzato i valori di partenza per evitare di comparare obiettivi con ordini di grandezza differenti si introducono pesi arbitrari a somma 1, ad esempio 0,5 e 0,5. Al variare dei pesi si esplora l'insieme delle soluzioni ammissibili individuando di volta in volta quella o quelle efficienti.

Nel caso in esame, non occorre normalizzare i pesi degli archi, essendo simili, e proprio imponendo la coppia 0,5-0,5, si ottiene il grafo in figura, cui corrisponde un valore ottimo dell'obiettivo fittizio $J = 0,5J_1 + 0,5J_2 = 13$, corrispondente alla soluzione A→E→D→F→G, già individuata precedentemente, e A→E→G.



Complessivamente delle tre soluzioni efficienti individuate si possono ricostruire i valori di entrambi gli obiettivi, fino a completare la seguente tabella

z^*	w_1	w_2	J_1	J_2
A→B→F→G	1,0	0,0	14,0	13,0
A→E→D→F→G	0,0	1,0	17,0	9,0
A→E→G	0,5	0,5	16,0	10,0