Politecnico di Milano, Corso di Modellistica e Simulazione

Esercizi sull'ottimizzazione in ambiente incerto

1 decidere in condizioni di incertezza nel discreto

1.1 il problema

Dopo il master siete indecisi sulla strada da intraprendere: potreste dedicarvi subito all'attività professionale, oppure iscrivervi a un master di secondo livello o, infine, fare un dottorato di ricerca. A questo proposito interrogate amici di famiglia e consultate degli studi e alla fine vi convincete che la vostra soddisfazione economica futura non dipenda solo dalla vostra scelta ma anche dalle condizioni economiche di medio periodo. Distinguendole tra negative, neutre e positive, la soddisfazione attesa nei vari casi è quella riportata nella tabella seguente.

	scenario		
scelta	negativo	neutro	positivo
lavoro	10	15	25
master	8	20	30
dottorato	2	18	35

1. Cosa scegliereste con un atteggiamento *pessimistico*?
2. E con uno *ottimistico*?
3. Stimando equiprobabili gli scenari negativo e neutro, e sapendo che quello positivo ha probabilità 0,2 di avverarsi, cosa scegliereste in modo *efficiente*?
4. In quest'ultimo caso, come dovrebbe cambiare la probabilità dello scenario positivo affinchè convenga il dottorato?

1.2 la soluzione

Si tratta di un problema i cui va ricercata la massima soddisfazione economica, che però non dipende solo dalla scelta, rappresentata dalla variabile discreta $z \in \mathcal{Z} = \{\text{lavoro, master, dottorato}\}$, ma anche dall'incertezza dello scenario economico, $\omega \in \Omega = \{\text{negativo, neutro, positivo}\}$.

La risposta alla prima domanda consiste nel decidere assumendo che l'incertezza sia la più sfavorevole, in modo da cautelarsi dal caso peggiore. Corrisponde quindi alla soluzione del problema

$$\max_{z\in\mathcal{Z}}\min_{\omega\in\Omega} J(z,\omega) \qquad \Rightarrow \qquad J^* = 10 \qquad \Rightarrow \qquad z^* = \text{lavoro}$$

Occorre infatti, per ogni scelta ammissibile, determinare il valore dell'obiettivo peggiore rispetto all'incertezza, quindi rispettivamente 10, 8 e 2 per ciascuna delle z, e poi individuare tra questi il valore migliore, 10, appunto.
Nel secondo caso, la decisione avviene invece assumendo che l'incertezza sia la più favorevole, e corrisponde quindi a

$$\max_{z\in\mathcal{Z}}\max_{\omega\in\Omega} J(z,\omega) \qquad \Rightarrow \qquad J^* = 35 \qquad \Rightarrow \qquad z^* = \text{dottorato}$$

Si noti che, nel caso prudente, gli operatori con cui si cerca l'ottimo e con cui si filtra l'incertezza sono discordi, mentre sono concordi se la scelta avviene con fiducia.
Nel terzo caso invece, l'operatore con cui si filtra l'incertezza è il valore atteso rispetto alle probabilità di accadimento delle possibili realizzazioni della variabile incerta

$$\max_{z\in\mathcal{Z}} \omega \mathop{\mathrm{E}}_{\omega\in\Omega}[J(z,\omega)] \qquad \Rightarrow \qquad J^* = 17,2 \qquad \Rightarrow \qquad z^* = \text{master}$$

Il risultato è stato ottenuto calcolando, innanzitutto, le 3 probabilità degli scenari economici: se il terzo ha probabilità di 0,2, gli altri due si presentano nel restante 80% dei casi e, essendo equiprobabili, ciascuno ha probabilità di 0,4. Per ogni possibile scelta, il valore atteso dell'obiettivo corrispondente è allora:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[J(\text{lavoro})] &= 10\times 0,4 + 15\times 0,4 + 25\times 0,2 = 15\\
\mathrm{E}\,[J(\text{master})] &= 8\times 0,4 + 20\times 0,4 + 30\times 0,2 = 17,2\\
\mathrm{E}\,[J(\text{dottorato})] &= 2\times 0,4 + 18\times 0,4 + 35\times 0,2 = 15
\end{aligned}$$

Perchè risulti preferibile il dottorato occorre evidentemente che la probabilità x dello scenario positivo aumenti. Volendo conservare l'equiprobabilità degli altri due scenari occorre allora verificare la seguente disuguaglianza:

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}\,[J(\text{dottorato})] > \mathrm{E}\,[J(\text{master})]\\
2(1-x)/2 + 18(1-x)/2 + 35x > 8(1-x)/2 + 20(1-x)/2 + 30x
\end{gathered}$$

che corrisponde a

$$5x > 4(1-x) \qquad \Rightarrow \qquad 9x > 4 \qquad \Rightarrow \qquad x > 4/9$$

2 PROBLEMA COMBINATORIO IN AMBIENTE INCERTO

2.1 IL PROBLEMA

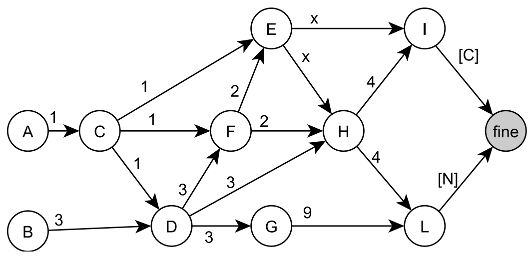
Un progetto prevede il completamento di alcune fasi, la cui durata (in mesi) è nota, insieme alle regole di precedenza da rispettare tra una fase e l'altra.

fasi	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
durate	1	3	1	3	x	2	9	4	[C]	[N]
precedenze	-	-	A	B,C	C,F	C,D	D	D,E,F	E,H	G,H

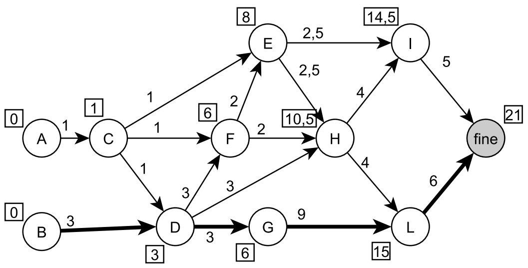
Sapendo che la durata x della fase E potrebbe essere pari a 2 mesi e mezzo, 3 o 5 mesi:

1. qual'è la durata minima in cui può essere completato il progetto?
2. e quale sarebbe volendone dare una stima prudente?
3. infine, se le tre durate avessero probabilità pari a 0,5 0,3 e 0,2 rispettivamente, quale sarebbe il tempo atteso?

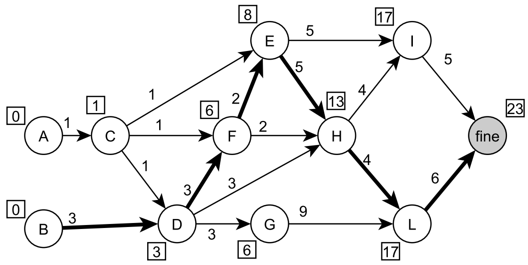
2.2 LA SOLUZIONE



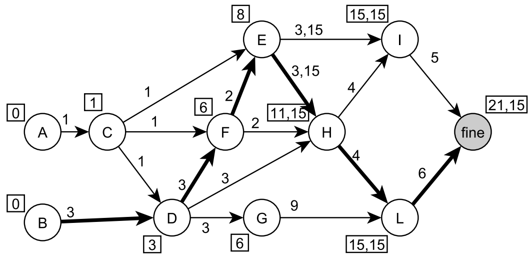
Si tratta di un problema combinatorio, in particolare di cammino massimo, da risolvere tenendo conto dell'incertezza legata alla durata x di una delle fasi, che rappresenta anche in questo caso un disturbo discreto, cioè con un numero finito di possibili realizzazioni.
Costruito il grafo tenendo conto delle fasi (nodi), precedenze (archi) e durate (pesi), si procede con l'algoritmo delle etichette. Nel caso degli archi EH e EI, la durata da considerare sarà, tra quelli possibili, rispettivamente il caso migliore (2,5), peggiore (5) e corrispondente al valore atteso, cioè $2,5 \times 0,5 + 3 \times 0,3 + 5 \times 0,2 = 3,15$ mesi.



A seconda dell'atteggiamento verso l'incertezza, potrebbe quindi cambiare il valore delle etichette dei nodi successivi alla fase E, quindi in particolare i nodi H, I e L, oltre naturalmente al nodo fittizio conclusivo, a valle delle fasi I e L, che sarà etichettato con il valore ottimo dell'obiettivo. Nel caso ottimistico, considerando come pesi degli archi finali ad esempio i valori 5 per il cognome e 6 per il nome, si ottiene una durata ottimale $J^* = 21$, corrispondente alla successione delle fasi critiche $B \to D \to G \to L$.



In quello pessimistico si ottiene invece una durata ottimale $J^* = 23$, corrispondente alla successione delle fasi critiche $B \to D \to F \to E \to H \to L$.



Nel caso del valor medio infine, la durata ottimale è pari a $J^* = 21,15$, corrispondente alla stessa successione delle fasi critiche $B \to D \to F \to E \to H \to L$.

3 ALBERO DELLE DECISIONI

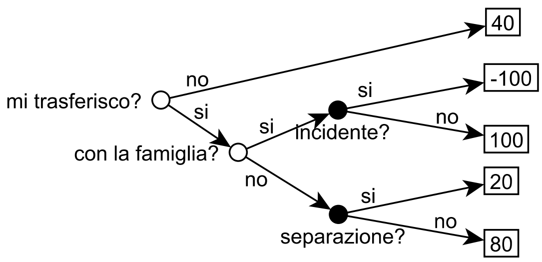
3.1 IL PROBLEMA

L'azienda per la quale lavorate vi propone un trasferimento per qualche anno in un paese ad alto rischio in cambio di uno scatto consistente di carriera. Se non accettaste, vi aspettate una soddisfazione personale complessiva di medio periodo pari a 40. Nel caso accettaste, dovete anche decidere se trasferirvi insieme alla vostra famiglia. Non facendolo, infatti, avreste una soddisfazione di 80, ma rischiereste una separazione nel 30% dei casi, e in quel caso la vostra soddisfazione scenderebbe a 20. D'altra parte, portandovi dietro la famiglia, arrivereste a 100 di soddisfazione. Il paese è però ad alto rischio, e con probabilità 0,2 potrebbe succedere un incidente grave alla vostra famiglia, e la soddisfazione precipiterebbe a -100.
Confrontate la soluzione pessimistica con quella efficiente.

3.2 LA SOLUZIONE

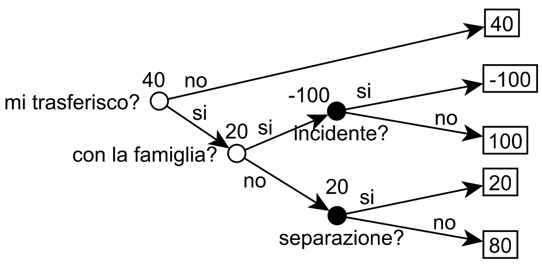
In questo problema ci sono due decisioni binarie, z_1 = "accetto il trasferimento" e z_2 = "porto la famiglia", e due disturbi anch'essi binari ω_1 = "possibile separazione" e ω_2 = "possibile incidente" che influenzano in varie combinazioni il valore dell'obiettivo J = "soddisfazione".

Per visualizzare in modo corretto la successione e le influenze di domande e disturbi, può essere conveniente disporli in un *albero delle decisioni*. Si tratta di un particolare grafo orientato che, partendo da una radice corrispondente sempre a una decisione, si ramifica fino alle foglie, ognuna delle quali rappresenta il particolare valore dell'obiettivo corrispondente

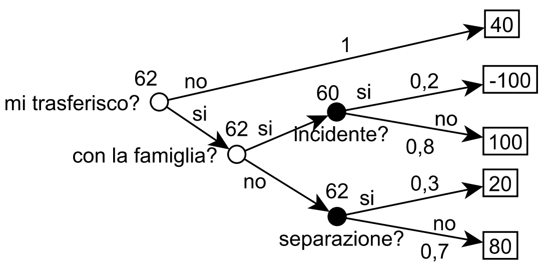


al percorso radice-foglia. Distinguendo con nodi vuoti le decisioni e con nodi pieni i

disturbi, e facendo fuoriuscire da ciascun nodo tanti archi quante sono le decisioni ammissibili o le possibili realizzazioni del disturbo (i due tipi di variabili devono essere discrete), il caso in esame ha la rappresentazione nella figura precedente.
Oltre che a dare una rappresentazione del problema, l'albero delle decisioni è anche uno strumento di soluzione. Si può infatti risalire dalle foglie verso la radice etichettando i nodi incontrati con il risultato delle operazioni di ottimizzazione (nodi decisionali) o di filtraggio dell'incertezza.



Nel caso prudente, di atteggiamento pessimistico, l'albero diventa quello affianco: l'incertezza viene filtrata con il minimo rispetto ai disturbi. I casi peggiori sono infatti che avvenga l'incidente (-100) o la separazione (20), e tra i due è meglio rischiare la separazione. Complessivamente allora conviene non accettare il trasferimento e accontentarsi del valore certo di $J^* = 40$.



Nel caso efficiente, l'operazione per filtrare l'incertezza è il valore atteso, e sugli archi che fuoriescono dai nodi pieni (quelli che rappresentano i disturbi) conviene indicare come pesi le probabilità associate. Complessivamente l'albero permette di ottenere il valore $J^* = 62$ che corrisponde alla successione di decisioni: z_1^* = "accetto il trasferimento" e z_2^* = "senza la famiglia", preferendo rischiare la separazione (valore atteso dell'obiettivo pari a 62) rispetto all'incidente (60).

4 PROBABILITÀ CONDIZIONATE

4.1 IL PROBLEMA

Dovete decidere se autorizzare uno scarico inquinante su un terreno marginale, sapendo che in alternativa andate incontro ad un costo sociale complessivo pari a 70.
Gli effetti dello scarico sul terreno sono più o meno dannosi a seconda del livello della falda sottostante. In caso di falda alta, il costo sociale complessivo salirebbe a 100, mentre in una situazione di falda bassa esso sarebbe pari a 20 e, in una situazione intermedia, pari a 50. Stime basate su misurazioni passate, vi fanno supporre che gli ultimi due livelli di falda potrebbero presentarsi rispettivamente nel 25% e 40% dei casi.

1. Cosa scegliereste in modo prudente?

2. E in modo efficiente?

3. Quanto sareste disposti a pagare per una misura del livello di falda, in termini di costo sociale complessivo?

4. Come cambierebbe la soluzione se poteste usare un modello con cui distinguere tra livello di falda superficiale e profonda, sapendo che questo secondo esito si è presentato in passato il 24%, 22% e 10% contemporaneamante ad un livello di falda bassa, media e alta?

4.2 LA SOLUZIONE

Le risposte alle prime due domande possono essere facilmente ottenute con le seguenti operazioni:

$$\min_z \max_\omega J(z,\omega) \qquad \Rightarrow \qquad \min_z \{70; 100\} = 70 \qquad \Rightarrow \qquad z^* = \text{non autorizzo}$$

nel caso prudente, e, considerando che la probabilità di accadimento della falda alta è pari a $1 - 0,25 - 0,40 = 0,35$, nel caso efficiente

$$\min_z \mathop{\mathrm{E}}_\omega J(z,\omega) \qquad \Rightarrow \qquad \min_z \{70; 35 + 20 + 5\} = 60 \qquad \Rightarrow \qquad z^* = \text{autorizzo}$$

La massima disponibilità a pagare una misura di livello di falda sarà ottenuto dalla differenza tra gli elementi dell'ottimizzazione, cioè tra il valore atteso 60 e il costo certo 70, sarà quindi pari a 10.
La risposta all'ultima domanda richiede invece di calcolare il valore atteso rispetto non alle *probabilità a-priori* $[(p(\omega)]$, come si è difatto sempre utilizzato sino ad ora, ma alle cosiddette *probabilità condizionate* $[p(\omega|y)]$, cioè le probabilità che si realizzi un particolare valore di un disturbo per il fatto che un'altra variabile, nell'esercizio corrispondente all'uscita y del modello di previsione del livello di falda, assuma un particolare valore. Per questo motivo sono anche dette *probabilità a-posteriori*. Il problema fornisce però le cosiddette *probabilità congiunte* $[p(\omega, y)]$, le quali non rappresentano un nesso di causa-effetto come nel caso di quelle condizionate, ma bensì si limitano a misurare la frequenza, in una serie di valori sufficientemente lunga, delle coppie di realizzazioni contemporanee di due variabili.
I tre tipi di probabilità sono in relazione tra loro attraverso il *Teorema di Bayes*: le probabilità condizionate sono calcolate dividendo le probabilità congiunte per le probabilità a-priori della variabile condizionante, quindi

$$p(\omega|y) = \frac{p(\omega, y)}{p(y)}$$

Nel caso in esame la variabile ω ha 3 possibili realizzazioni, mentre y solo due: le matrici delle probabilità condizionate e congiunte sono quindi rettangolari, 3×2. D'altra parte sono note solo 3 probabilità congiunte e quelle a-priori di ω, ma esiste la seguente proprietà:

$$\sum_i p(\bar{\omega}, y_i) = p(\bar{\omega})$$

cioè la somma delle probabilità congiunte al variare di una variabile, fissata l'altra, corrisponde proprio alla probabilità a priori della variabile fissata. Questa proprietà vale anche invertendo le variabili, cioè

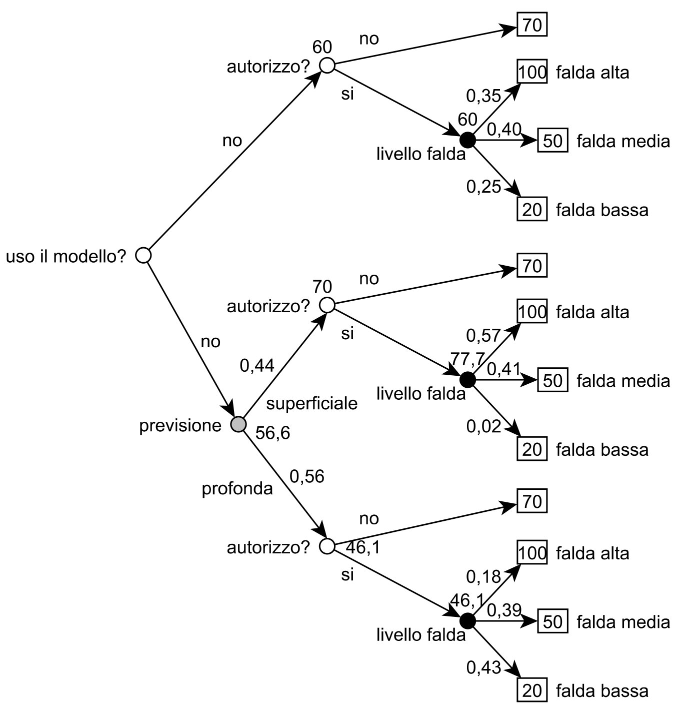
$$\sum_i p(\omega_i, \bar{y}) = p(\bar{y})$$

Con questa proprietà si può quindi completare la tabella delle probabilità congiunte (a sinistra, nella quale è evidenziato anche il fatto che la somma delle probabilità congiunte e di quelle a-priori è sempre pari a 1), e poi ottenere, con il teorema di Bayes, quella delle probabilità condizionate (a destra, dove fanno somma 1 le due colonne separatamente).

$p(\omega, y)$	y		$p(\omega)$
	0,24	0,01	0,25
ω	0,22	0,18	0,40
	0,10	0,25	0,35
$p(y)$	0,56	0,44	1,00

$p(\omega\|y)$	y	
	0,24/0,56=0,43	0,01/0,44=0,02
ω	0,22/0,56=0,39	0,18/0,44=0,41
	0,10/0,56=0,18	0,25/0,44=0,57
	1,00	1,00

Per riuscire a districarsi tra probabilità a priori e probabilità condizionate nel calcolo del valore atteso, conviene affidarsi nuovamente all'albero delle decisioni, introducendo come radice una decisione implicita riguardo all'uso o meno del modello di previsione.



Senza modello, l'albero rappresenta il caso già affrontato (efficienza). Per rappresentare l'uso del modello occorre inserire un nuovo tipo di nodi (in grigio), da cui escono tanti archi quanti sono i possibili esiti dell'uscita del modello, pesati con le relative probabilità a-priori. La struttura successiva ricalca la parte alta, tranne che per i pesi degli archi uscenti dai nodi neri, che questa volta assumono i valori delle probabilità condizionate dal valore di y corrispondente. Costruito l'albero lo si utilizza con le stesse regole: si calcola un valore atteso in corrispondenza dei nodi neri (e grigi), l'ottimo (in questo caso il minimo) nei nodi bianchi.

Arrivati alla radice occorre tener conto del "costo" del modello: in questo caso la massima disponibilità a pagarlo è fornito dalla differenza tra 60 (la soluzione ottima senza) e

56,6 (la soluzione con), quindi in definitiva si ottiene la seguente soluzione: se il modello costa più di 3,4 unità di costo sociale, non uso il modello e autorizzo lo scarico (parte alta dell'albero); se costa meno, effettuo la previsione e, se il modello prevede la falda profonda, non autorizzo (parte intermedia); se invece prevede un livello profondo, autorizzo (parte bassa).