

Esercizi di Formulazione e di calcolo dell'Equilibrio

1 LA SCUOLA

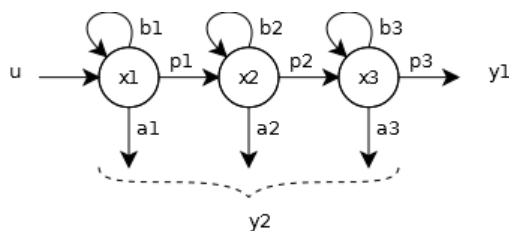
1.1 IL PROBLEMA

Una scuola permette agli studenti di diplomarsi dopo 3 anni di studio. Sapendo che ogni anno si immatricolano u studenti, che sono promossi all'anno successivo con un tasso medio p_i ($i = 1, 2, 3$), si formuli un modello con cui rappresentarne il funzionamento, per poter calcolare ogni anno il numero di diplomati e il totale degli eventuali abbandoni.

1.2 LA SOLUZIONE

Per poter rappresentare correttamente un fenomeno per il quale le informazioni si riferiscono a intervalli di tempo finiti (l'anno, in questo caso), occorre ovviamente scegliere una rappresentazione tempo-discreta. In particolare il modello da utilizzare viene detto "a classi di età", dove per età in questo caso si intende la frequenza a uno dei tre anni che compongono la scuola.

La formulazione si avvale di una variabile di stato (x_i , numero di studenti che frequentano ogni anno la classe i) per ogni anno di studio, e due variabili di uscita per rappresentare le due grandezze richieste, sempre con frequenza annuale (y_1 , studenti diplomati; y_2 , studenti che abbandonano).



Nello schema in figura sono evidenziati tutti i flussi degli studenti, compresi gli studenti bocciati che dovranno ripetere l'anno e quelli che abbandonano, con tassi rispettivamente b_i e a_i . Trascurando eventuali trasferimenti da o per altre scuole, il modello è così

formulato:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= b_1x_1(t) + u(t) \\x_2(t+1) &= p_1x_1(t) + b_2x_2(t) \\x_3(t+1) &= p_2x_2(t) + b_3x_3(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= p_3x_3(t) \\y_2(t) &= a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + a_3x_3(t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Poichè gli studenti di ogni anno i possono solo essere promossi, bocciati o abbandonare, i parametri introdotti non sono indipendenti, ma, valgono le seguenti relazioni:

$$a_i = 1 - p_i - b_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3$$

Tutte le equazioni scritte sono lineari, quindi il modello si può formulare anche in forma matriciale:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u_t \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{C}\mathbf{x}_t\end{aligned}$$

dove, sostituendo i parametri a_i :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ p_1 & b_2 & 0 \\ 0 & p_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_3 \\ 1 - b_1 - p_1 & 1 - b_2 - p_2 & 1 - b_3 - p_3 \end{bmatrix}$$

Dal punto di vista della classificazione, il modello è a parametri concentrati, deterministico, invariante, proprio e lineare. Inoltre è tempo-discreto, di ordine 3, con 1 ingresso e 2 uscite.

2 LA LOGISTICA EFFICIENTE

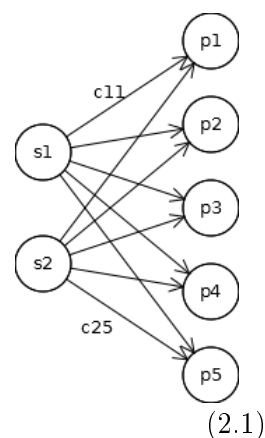
2.1 IL PROBLEMA

Occorre decidere come rifornire 5 negozi con una merce prelevabile da 2 differenti magazzini. Note le disponibilità esistenti nei 2 magazzini, le richieste minime da soddisfare per i 5 negozi, e i costi unitari di trasporto che vanno sostenuti per ogni possibile percorso, si formuli il problema decisionale per ottenere la soluzione a costo minimo.

2.2 LA SOLUZIONE

Si tratta di un classico problema di logistica, ove occorre introdurre una variabile decisionale (z_{ij}) per ogni percorso ammissibile tra sorgenti (i 2 magazzini) e pozzi (i 5 negozi). Ne derivano in questo caso 10 variabili decisionali, ognuna delle quali rappresenta la quantità di merce che si decide di spostare dal magazzino i ($i = 1, 2$) al negozio j ($j = 1, \dots, 5$) con un costo associato per unità di merce pari a c_{ij} .

L'obiettivo J consiste nel trovare il minimo del costo totale, ottenibile sommando tutti i costi parziali derivanti da un particolare percorso.



$$\min_{z_{ij}} \sum_{i,j} c_{ij} z_{ij} \quad \text{con } i = 1, 2 \text{ e } j = 1, \dots, 5 \quad (2.1)$$

Occorre infine formulare i vincoli del problema che, in questo caso, devono rappresentare le 2 disponibilità presso i magazzini s_i , e le 5 richieste minime dei negozi p_j , oltre alla non negatività delle variabili di decisione in quanto rappresentano quantitativi di merce.

$$\begin{aligned} \sum_j z_{ij} &\leq s_i \quad \text{con } i = 1, 2 \\ \sum_i z_{ij} &\geq p_j \quad \text{con } j = 1, \dots, 5 \\ z_{i,j} &\geq 0 \quad \text{con } i = 1, 2 \text{ e } j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Il problema così formulato presenta una struttura lineare nelle variabili di decisione per quanto riguarda sia l'obiettivo sia i vincoli, si tratta cioè di un problema decisionale di Programmazione Lineare con 1 obiettivo, 10 variabili di decisione e 7 vincoli.

3 CALCOLO DELL'EQUILIBRIO PER UN SISTEMA TEMPO-CONTINUO

3.1 IL PROBLEMA

Si rappresenti la relazione tra ingresso e variabili di uscita e di stato in corrispondenza dell'equilibrio per il seguente sistema:

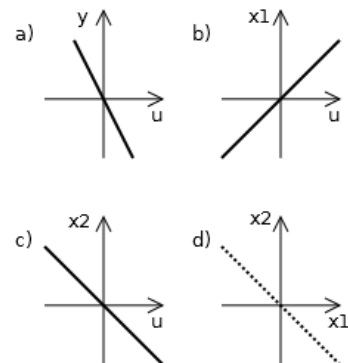
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \\ y &= x_1 + 3x_2\end{aligned}$$

3.2 LA SOLUZIONE

Le relazioni richieste vanno individuate imponendo la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio dei sistemi tempo-continui (lineari e non) $\dot{\mathbf{x}} = 0$, a ingressi costanti, quindi quando $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$.

Le equazioni differenziali di transizione di stato, all'equilibrio diventano ovviamente algebriche. Quindi il calcolo dell'equilibrio dei sistemi dinamici si riduce alla risoluzione di sistemi algebrici, costituiti da tante equazioni quante sono le variabili di stato, i cui valori all'equilibrio ne rappresentano altrettante incognite:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= -2\bar{x}_2 - \bar{u} & \bar{x}_2 &= -\bar{u} \\ \bar{x}_1 &= -\bar{x}_2 & \bar{x}_1 &= \bar{u} \\ \bar{y} &= \bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 & \bar{y} &= -2\bar{u}\end{aligned}$$



Le relazioni trovate tra valore costante in ingresso $\bar{u}$ e rispettivamente uscita all'equilibrio $\bar{y}$ (figura a) e singole componenti dello stato $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ (figure b e c) sono rappresentate su grafico come delle rette (essendo il sistema dinamico di partenza lineare). Nello spazio di stato (figura d) si osserva invece l'allineamento dei punti di equilibrio, ognuno dei quali si realizza, uno alla volta, in corrispondenza di un certo valore di ingresso.

4 CALCOLO DELL'EQUILIBRIO PER UN SISTEMA TEMPO-DISCRETO

4.1 IL PROBLEMA

Si rappresenti la relazione tra ingresso e variabili di uscita e di stato in corrispondenza dell'equilibrio per il seguente sistema:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\x_2(t+1) &= x_1(t) + x_2(t) \\y(t) &= x_1(t) + 3x_2(t)\end{aligned}$$

4.2 LA SOLUZIONE

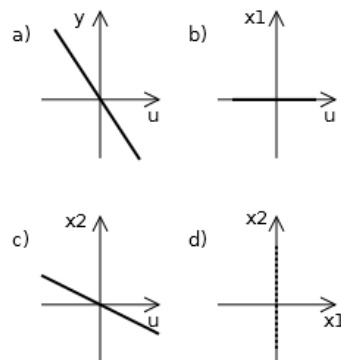
Le relazioni richieste vanno individuate imponendo la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio dei sistemi tempo-discreti (lineari e non) $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{x}}$ sempre con $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$. Come per il caso tempo-continuo, il calcolo dell'equilibrio si riduce alla risoluzione di un sistema algebrico, costituito in questo esercizio da 2 equazioni in 2 incognite ($\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$).

$$\begin{aligned}x_1(t+1) = x_1(t) = \bar{x}_1 &= \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{u} \rightarrow \bar{x}_2 = -\bar{u}/2 \\x_2(t+1) = x_2(t) = \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_1 = 0\end{aligned}$$

e, sostituendo nella trasformazione di uscita:

$$y(t) = \bar{y}_t = \bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 \rightarrow \bar{y} = -3/2\bar{u}$$

La rappresentazione su grafico delle relazioni individuate è analoga al caso precedente, essendo lineare anche questo sistema.



5 CALCOLO DELL'EQUILIBRIO: UN CASO PARTICOLARE

5.1 IL PROBLEMA

Si rappresenti la relazione all'equilibrio tra ingresso e uscita per il seguente sistema:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= 2x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\x_2(t+1) &= -3x_1(t) + 4x_2(t) \\y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

5.2 LA SOLUZIONE

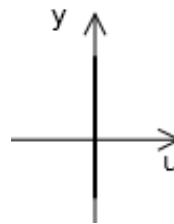
Come nell'esercizio precedente, imponendo la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio dei sistemi tempo-discreti (lineari e non) $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{x}}$ con $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ ci si riduce alla risoluzione di un sistema algebrico, costituito in questo caso da 2 equazioni in 2 incognite ($\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$).

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 2\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{u} & \bar{x}_1 &= \bar{x}_2 - \bar{u} \\ \bar{x}_2 &= -3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 & \bar{x}_1 &= \bar{x}_2\end{aligned}$$

Come si può notare, le due relazioni trovate sono verificate contemporaneamente solo per $\bar{u} = 0$, cioè solo scegliendo un particolare valore costante dell'ingresso.

Si può quindi concludere che, per tutti i valori non nulli dell'ingresso, il sistema non ha equilibri, mentre ne ha infiniti se si sceglie proprio il valore zero. In quest'ultimo caso, sostituendo il risultato trovato nella trasformazione di uscita, si ottiene:

$$\bar{y} = \bar{x}_2$$



La rappresentazione su grafico, al contrario dei casi precedenti, rappresenta quindi gli infiniti valori dell'uscita all'equilibrio, che esistono unicamente in corrispondenza dell'ingresso nullo.