Politecnico di Milano, Corso di Modellistica e Simulazione

Esercizi di Formulazione, calcolo dell'Equilibrio, analisi di Stabilità e del Transitorio

1 Il modello di Lotka-Volterra

1.1 il problema

Una popolazione di prede (biomassa complessiva x_1) è caratterizzata da un tasso di crescita malthusiana pari a n. La scarsità di risorse dell'ambiente nel quale vive induce una competizione intraspecifica con tasso c. Le prede sono sottoposte anche alla pressione di una popolazione di predatori, di biomassa x_2 che, in assenza di prede, si estinguerebbe con tasso m. Possiede inoltre un coefficiente di predazione pari a p e un'efficienza di trasformazione pari a e. Si costruisca un modello preda-predatore utilizzando le 2 variabili di stato, le ipotesi e i parametri precedentemente definiti. Con esso si calcoli la capacità portante dell'ambiente rispetto alle prede e si valutino tutti gli equilibri presenti.

1.2 la soluzione

Immaginando un sistema autonomo, senza cioè ingressi (quindi senza immigrazione e emigrazione di prede e di predatori), il modello tempo-continuo può essere formulato come segue:

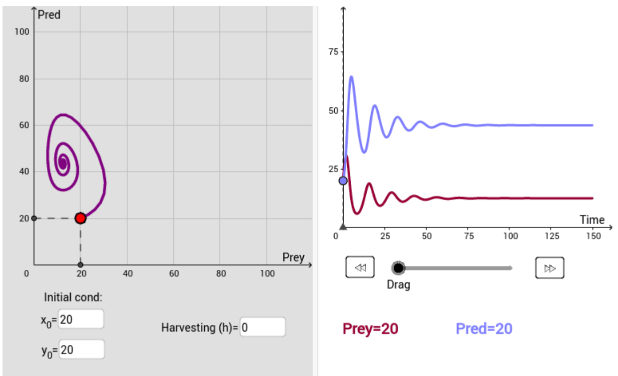
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= nx_1 - cx_1^2 - px_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -mx_2 + epx_1x_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nella prima equazione, nell'ordine, per le prede sono definiti: il contributo positivo di crescita, quelli negativi di competizione intraspecifica e di predazione, nei quali, rispettivamente, i prodotti di x_1 con se stessa e con x_2, sono la rappresentazione più semplice della probabilità con cui avviene un incontro, e quindi la competizione sulla risorsa. Nella seconda equazione, alla decrescita dei predatori, si aggiunge la trasformazione della biomassa predata px_1x_2 in "biomassa di predatori" tramite il parametro e.
Dal punto di vista della classificazione, il modello è a parametri concentrati, deterministico, invariante, non lineare (per la presenza del quadrato e dei prodotti x_1x_2), tempo-continuo, di ordine 2 e, appunto, autonomo.

Per quanto riguarda gli equilibri, occorre imporre la condizione $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 \left(n - c\bar{x}_1 - p\bar{x}_2\right) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad [s1.1]\ \bar{x}_1 = 0; \quad [s1.2]\ \left(n - c\bar{x}_1 - p\bar{x}_2\right) = 0 \\ \bar{x}_2 \left(-m + ep\bar{x}_1\right) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad [s2.1]\ \bar{x}_2 = 0; \quad [s2.2]\ \bar{x}_1 = \frac{m}{ep} \end{aligned}$$

Il sistema presenta un primo equilibrio corrispondente alle prime due soluzioni [s1.1] e [s2.1], cioè all'estinzione sia delle prede sia dei predatori ($\mathsf{E}_1\,(0;0)$).
Sostituendo la condizione di assenza di predatori [s2.1] ottenuto dalla seconda equazione ($\bar{x}_2 = 0$) nella seconda soluzione della prima equazione [s1.2], si ottiene invece la capacità portante: le prede, in assenza di predatori, presentano un equilibrio pari a $\bar{x}_1 = \frac{n}{c}$, quindi $\mathsf{E}_2\left(\frac{n}{c};0\right)$
Il terzo e ultimo equilibrio si ottiene invece sostituendo la [s2.2] ($\bar{x}_1 = \frac{m}{ep}$) nella [s1.2], ottenendo $\bar{x}_2 = \frac{n}{p} - \frac{cm}{ep^2}$. Ammesso che numericamente questo valore sia positivo in modo che abbia senso fisicamente, si tratta di un equilibrio $\mathsf{E}_3\left(\frac{m}{ep}; \frac{n}{p} - \frac{cm}{ep^2}\right)$ di convivenza delle due speci.
La simulazione di un modello siffatto mostra i movimenti oscillatori rappresentati nella parte di destra della figura sottostante: a fasi di espansione delle prede seguono espansioni dei predatori che innescano la contrazione delle prede, che a sua volta fa diminuire i predatori.
Attraverso la simulazione del modello (il link in figura ne è un esempio) o l'analisi di stabilità degli equilibri, che richiede di apprendere la tecnica di linearizzazione del sistema nel loro intorno, si potrebbe determinare la natura dei 3 equilibri, in particolare si scoprirebbe se il terzo è asintoticamente stabile. In questo caso, le oscillazioni dei movimenti si tradurrebbero, nel piano di stato, in un andamento a spirale verso il punto di equilibrio stesso.



www.geogebra.org/m/zZ63s4pC

2 Un modello delle relazioni di coppia

2.1 il problema

L'amore in una coppia si nutre dell'amore reciproco, oltre ad essere influenzato da fattori esterni. D'altra parte, se non adeguatamente alimentato, tende a spegnersi. Rappresentare il fenomeno con un modello lineare, verificare se è possibile un equilibrio di coppia e se a tale equilibrio si tende oppure no.

2.2 la soluzione

Il modello più semplice per rappresentare l'amore utilizza 2 variabili di stato: l'intensità amorosa di ciascun partner. Volendo scrivere un modello lineare, le variazioni di tali intensità sono dovute, in positivo, al *feedback* proveniente dall'altro, proporzionali con coefficienti a e b, in negativo a un decadimento "per abitudine" dell'intensità stessa, proporzionali con coefficienti c e d. Vi sono poi fattori esterni che possono contribuire positivamente o negativamente a seconda dei casi. La rappresentazione matematica di quanto detto è la seguente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -cx_1 + ax_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= bx_1 - dx_2 + u_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Come si vede, un modello a parametri concentrati, deterministico, invariante, ovviamente lineare, tempo-continuo, di ordine 2, con 2 ingressi.
L'eventuale equilibrio del sistema va ricercato, per ingressi costanti ($u_1 = \bar{u}_1$ e $u_2 = \bar{u}_2$) imponendo la consueta condizione $\dot{\mathbf{x}} = 0$:

$$\begin{aligned} -c\bar{x}_1 + a\bar{x}_2 + \bar{u}_1 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \bar{x}_1 = \frac{a\bar{x}_2 + \bar{u}_1}{c} \\ b\bar{x}_1 - d\bar{x}_2 + \bar{u}_2 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad b\frac{a\bar{x}_2 + \bar{u}_1}{c} - d\bar{x}_2 + \bar{u}_2 = 0 \end{aligned}$$

Dopo una serie di passaggi algebrici, si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{d\bar{u}_1 + a\bar{u}_2}{cd - ab} \\ \bar{x}_2 &= \frac{b\bar{u}_1 + c\bar{u}_2}{cd - ab} \end{aligned}$$

Le soluzioni trovate sono valori reali finiti, e quindi corrispondono all'esistenza di un equilibrio, se il denominatore non è nullo, quindi per $cd \neq ab$. Se poi si volessero considerare, per il significato delle variabili di stato, solo valori positivi, essendo tutti i parametri non negativi, occorrerebbe restringere la precedente condizione imponendo: $cd > ab$.
Quanto alla stabilità, la linearità del sistema ci permette di desumerla unicamente dall'analisi della matrice A con cui si può rappresentare matricialmente il modello. La condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità di un sistema lineare tempo continuo di ordine n è infatti:

$$\mathsf{Re}\,(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

dove λ_i è l'i-esimo autovalore della matrice, cioè la i-esima radice del polinomio caratteristico di ordine n della matrice stessa, definito come

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \mathsf{det}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

dove $\mathbf{I}$ è la matrice identità di ordine n.
Nel caso particolare di sistema di ordine due, come quello in esame, il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ corrisponde alla parabola definita sulla base di traccia e determinante della matrice stessa:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \mathsf{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \mathsf{det}(\mathbf{A})$$

Inoltre, la condizione di asintotica stabilità generale precedentemente introdotta è equivalente alla duplice condizione, da verificarsi contemporaneamente, su traccia e determinante

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}(\mathbf{A}) &< 0 \\ \mathsf{det}(\mathbf{A}) &> 0 \end{aligned}$$

Nel caso in esame

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -c & a \\ b & -d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathsf{tr}(\mathbf{A}) &= -(c+d) \\ \mathsf{det}(\mathbf{A}) &= cd - ab \end{aligned}$$

Ricordando quanto detto a proposito dei parametri del modello, mentre la condizione sulla traccia è sempre verificata, quella sul determinante lo è proprio per $cd > ab$.
La conclusione è che, credendo al modello, un equilibrio di coppia si può trovare solo se il prodotto dei parametri di "raffreddamento" c e d sovrasta quello dei parametri "passionali" a e b, altrimenti il "gorgo" della passione aumenterebbe indefinitamente.

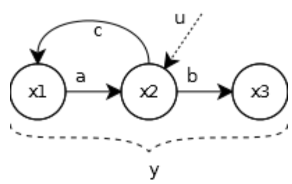
3 Un modello a classi di età

3.1 il problema

Una popolazione animale può essere suddivisa in 3 classi d'età: piccoli, adulti e anziani. Ad ogni passo temporale, le percentuali a dei piccoli e b degli adulti diventano rispettivamente adulti e anziani, mentre tutti gli altri individui muoiono. Sempre ad ogni passo temporale ogni adulto genera c nuovi piccoli.
Si descriva la dinamica della popolazione con un modello che consenta di ottenerne la dimensione totale, lo si classifichi, se ne calcoli l'equilibrio e si dica se la popolazione tende ad espandersi o ad esaurirsi.
Si dica infine se un'immigrazione costante di individui adulti modificherebbe la condizione asintotica determinata al punto precedente.

3.2 la soluzione

Si tratta, come nel caso già visto della scuola, di un modello "a classi di età", per formulare il quale occorrono 3 variabili di stato x_i, una per ogni classe appunto. Nello schema in figura sono evidenziati il processo di invecchiamento con tassi a e b, e di generazione, con tasso c. E' anche evidenziato l'eventuale ingresso menzionato nell'ultima domanda. Il modello è quindi così formulato:



$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= cx_2(t) && (3.1)\\
x_2(t+1) &= ax_1(t) \quad [\, + u(t)\,] \\
x_3(t+1) &= bx_2(t) \\
y(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) && (3.2)
\end{aligned}
$$

Dal punto di vista della classificazione, il modello è a parametri concentrati, deterministico, invariante, proprio e lineare. Inoltre è tempo-discreto, di ordine 3, con 1 eventuale ingresso e 1 uscita.
Il calcolo dell'equilibrio, supposto l'eventuale ingresso u costante, richiede di imporre la condizione $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ alle equazioni di transizione di stato (3.1). Si tratta quindi di trovare la soluzione del seguente sistema algebrico:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= c\bar{x}_2 && \Rightarrow && \bar{x}_1 = c\frac{\bar{u}}{1-ac} \\
\bar{x}_2 &= a\bar{x}_1 + \bar{u} && \Rightarrow && \bar{x}_2 = \frac{\bar{u}}{1-ac} \\
\bar{x}_3 &= b\bar{x}_2 && \Rightarrow && \bar{x}_3 = b\frac{\bar{u}}{1-ac}
\end{aligned}
$$

Nel caso di assenza dell'ingresso (quindi per $\bar{u} = 0$) l'equilibrio trovato corrisponderebbe a quello banale con tutte le componenti dello stato nulle. Questo vale per tutti i sistemi autonomi: se esiste un equilibrio, è quello banale!

Per quanto riguarda la domanda sull'espansione o esaurimento della popolazione, occorre rispondere attraverso l'analisi di stabilità. Trattandosi di un modello lineare, la stabilità è una proprietà strutturale della matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & b & 0 \end{array}\right]$$

Si tratta di una matrice di ordine 3, per la quale quindi il polinomio caratteristico, dal quale desumere gli autovalori, è una cubica. La matrice però è scomponibile a blocchi per la presenza degli zeri nell'ultima colonna, che possono essere isolati tracciando una sola linea verticale e una orizzontale che si incrociano lungo la diagonale principale. Il polinomio caratteristico del sistema di partenza coincide allora col prodotto del terzo autovalore $\lambda_3 = 0$, per il polinomio caratteristico del sotto-sistema di ordine 2. Grazie alla scomposizione i conti possono quindi essere semplificati.
Ricordando la condizione necessaria e sufficiente di asintotica stabilità per i sistemi discreti di ordine 2 (duplice condizione da verificarsi contemporaneamente):

$$|\mathsf{tr}(\mathbf{A})| < 1 + \mathsf{det}(\mathbf{A})$$
$$|\mathsf{det}(\mathbf{A})| < 1$$

e di ordine n qualsiasi:

$$|\lambda_i| < 1 \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n$$

quest'ultima evidentemente verificata per λ_3, occorre calcolare traccia e determinante del sotto-sistema di ordine 2:

$$\mathsf{tr}(\mathbf{A}) = 0$$
$$\mathsf{det}(\mathbf{A}) = -ac$$

bisogna quindi verificare che:

$$|0| < 1 - ac$$
$$|-ac| < 1$$

Essendo i parametri a e c delle percentuali, il loro campo di esistenza è tra 0 e 1, quindi la doppia condizione non si verificherebbe solo qualora essi assumessero contemporaneamente valore pari al loro estremo superiore.
In definitiva, salvo il caso di assenza di mortalità nel passaggio piccoli-adulti e adulti-anziani, il sistema è asintoticamente stabile, quindi si porta all'equilibrio in tempo finito: a quello banale nel caso di ingresso nullo, a valori diversi da zero altrimenti. La stabilità non è però influenzata dalla presenza o assenza dell'ingresso.

4 Analisi di stabilità con scomposizione in blocchi

4.1 il problema

Si studi la stabilità del sistema tempo-continuo di matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2/3 & -3 \\ 1 & a & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3/4 & 0 & b & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & 1/3 & 1 \\ -1/3 & 1 & 0 & 2 & -1 & d & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & -e \end{bmatrix}$$

in funzione dei parametri reali a, b, c, d, e.

4.2 la soluzione

La condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità di un sistema lineare tempo continuo di ordine n è che

$$\mathsf{Re}\,(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Dovremmo cioè individuare 8 autovalori come radici del polinomio caratteristico che, in questo caso, è appunto di ottavo grado.
Come nell'esercizio precedente e grazie alla presenza di zeri opportunamente disposti, la matrice è però scomponibile ricorsivamente a blocchi:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc:cc:c:cc} -1/2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2/3 & -3 \\ 1 & a & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3/4 & 0 & b & 0 & -4 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & 1/3 & 1 \\ \hdashline -1/3 & 1 & 0 & 2 & -1 & d & 0 & 1/5 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & -e \end{array}\right]$$

da cui si ricavano i seguenti sotto-sistemi rintracciabili lungo la diagonale principale:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 3 & -2 & -3/4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & c \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = [d] \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ -1/4 & -e \end{bmatrix}$$

che dimostrano come il parametro b, che non è presente in nessuna delle suddette matrici, non contribuisca all'asintotica stabilità del sistema.
La matrice $\mathbf{A}_1$ è triangolare, quindi i primi 3 autovalori possono essere letti lungo la diagonale principale e, per la stabilità, devono essere verificate le disuguaglianze:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} < 0 \qquad \lambda_2 = a < 0 \qquad \lambda_3 = -\frac{3}{4} < 0$$

quindi, condizione necessaria (ma non sufficiente, perchè occorre analizzare le altre sotto-matrici) per l'asintotica stabilità del sistema è che $a < 0$.
La matrice $\mathbf{A}_2$ è di ordine 2, quindi, invece di analizzare λ_4 e λ_5, si possono usare le condizioni su traccia e determinante:

$$\begin{array}{lclcl} \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}_2) < 0 & \Rightarrow & \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}_2) = c - 1 & \Rightarrow & c < 1 \\ \mathsf{det}\,(\mathbf{A}_2) > 0 & \Rightarrow & \mathsf{det}\,(\mathbf{A}_2) = -c + 3 & \Rightarrow & c < 3 \end{array}$$

L'intersezione delle due condizioni porta a concludere che un'altra condizione necessaria è $c < 1$.
Passando a $\mathbf{A}_3$, si tratta di uno scalare che quindi coincide con il sesto autovalore. Bisogna allora verificare che

$$\lambda_6 = d < 0$$

quindi occorre che anche d sia negativo.
Infine, per $\mathbf{A}_4$, di ordine 2, utilizzando ancora una volta la condizione su traccia e determinante, si ottiene:

$$\begin{array}{lclcl} \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}_4) < 0 & \Rightarrow & \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}_4) = \frac{1}{2} - e & \Rightarrow & e > \frac{1}{2} \\ \mathsf{det}\,(\mathbf{A}_4) > 0 & \Rightarrow & \mathsf{det}\,(\mathbf{A}_4) = -\frac{e}{2} + \frac{1}{2} & \Rightarrow & e < 1 \end{array}$$

L'intersezione delle due condizioni porta a concludere che l'ultima condizione necessaria è $\frac{1}{2} < e < 1$.
Riassumendo, le condizioni nel loro complesso necessarie e sufficienti, sono:

$$a < 0; \quad b \text{ qualsiasi}; \quad c < 1; \quad d < 0; \quad \frac{1}{2} < e < 1$$

5 Analisi del transitorio

5.1 il problema

Si considerino 3 sistemi tempo-discreti, le cui matrici $\mathbf{A}$ sono le seguenti:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 7/8 & -4/5 \\ 1/4 & 3/5 & 2/5 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Si stabilisca quale dei 3 sistemi raggiunge per primo l'equilibrio e in quanto tempo.

5.2 la soluzione

Si tratta di 3 sistemi del quarto ordine. La prima matrice è l'unica non scomponibile, ma si può osservare che:

$$\mathsf{tr}\left(\mathbf{A}_1\right) = 4$$

che non soddisfa la condizione solo necessaria per l'asintotica stabilità, valida per i sistemi tempo-discreti di ordine n

$$\left|\mathsf{tr}\left(\mathbf{A}\right)\right| < n$$

Quindi per il sistema 1, non asintoticamente stabile, non ha senso analizzare il transitorio.
Gli altri due sistemi verificano invece la condizione necessaria:

$$\mathsf{tr}\left(\mathbf{A}_2\right) = \frac{1}{6} \qquad \mathsf{tr}\left(\mathbf{A}_3\right) = \frac{11}{10}$$

occorre quindi procedere alla loro analisi.
La scomposizione in blocchi della seconda matrice

$$\mathbf{A}_2 = \left[\begin{array}{cc:cc} -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right]$$

permette di ricondursi all'analisi di due sotto-sistemi del secondo ordine, il primo dei quali è anche triangolare, quindi:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

con entrambi che soddisfano la condizione necessaria e sufficiente di asintotica stabilità:

$$|\lambda_i| < 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Il secondo blocco ha invece traccia e determinante pari a

$$\mathsf{tr}\left(\mathbf{A}_2''\right) = 0$$
$$\mathsf{det}\left(\mathbf{A}_2''\right) = \frac{1}{2}$$

Essendo verificate le condizioni valide per un sistema del secondo ordine

$$\begin{aligned} |\mathsf{tr}(\mathbf{A})| &< 1 + \mathsf{det}(\mathbf{A}) & \Rightarrow \quad & |0| < \frac{3}{2} \\ |\mathsf{det}(\mathbf{A})| &< 1 & \Rightarrow \quad & \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \end{aligned}$$

occorre procedere con il calcolo degli autovalori, cioè le radici di:

$$\lambda^2 - \mathsf{tr}\,(\mathbf{A})\,\lambda + \mathsf{det}\,(\mathbf{A}) = \lambda^2 + \frac{1}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$$

evidentemente immaginari e coniugati, il cui modulo è comunque minore di 1.
Analogamente, per la terza matrice

$$\mathbf{A}_3 = \left[\begin{array}{cc:cc} 1/2 & -1 & 7/8 & -4/5 \\ 1/4 & 3/5 & 2/5 & 1/2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

ci si riconduce all'analisi di due sotto-sistemi del secondo ordine. Questa volta è il secondo ad essere triangolare, quindi i corrispondenti autovalori sono:

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \qquad \lambda_4 = -\frac{1}{2}$$

e entrambi soddisfano la condizione necessaria e sufficiente di asintotica stabilità.
Il primo blocco ha invece traccia e determinante pari a

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}\left(\mathbf{A}_3'\right) &= \frac{11}{10} \\ \mathsf{det}\left(\mathbf{A}_3'\right) &= \frac{11}{20} \end{aligned}$$

che verificano le condizioni valide per un sistema del secondo ordine

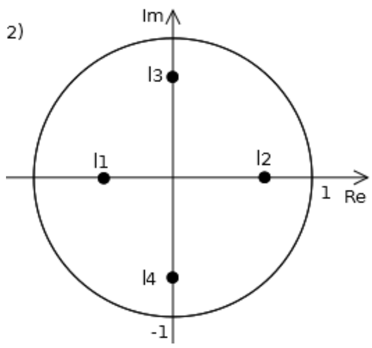
$$\begin{aligned} \left|\frac{11}{10}\right| &< \frac{31}{20} \\ \left|\frac{11}{20}\right| &< 1 \end{aligned}$$

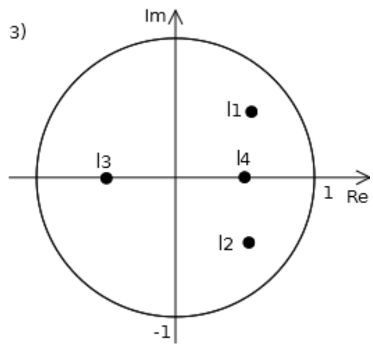
e che quindi ci impongono di calcolare gli autovalori:

$$\lambda^2 - \frac{11}{10}\lambda + \frac{11}{20} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \frac{11 \pm 3\sqrt{11}i}{20}$$

cioè 2 radici complesse coniugate, il cui modulo è

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \frac{\sqrt{11^2 + 9 \times 11}}{20} = \frac{\sqrt{220}}{20} \approx 0.7416 < 1$$





Complessivamente gli autovalori del sistema 2 e 3 sono rappresentati nel piano dei numeri complessi come in figura. Graficamente è immediato individuare gli autovalori dominanti, cioè i più vicini alla frontiera di stabilità che corrisponde alla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. Si tratta, rispettivamente, di

$$\lambda_2^{\mathrm{D}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}i \qquad \lambda_3^{\mathrm{D}} = \frac{11 \pm 3\sqrt{11}i}{20}$$

da cui si possono ricavare le costanti di tempo dominanti:

$$\mathrm{T}^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{\ln|\lambda^{\mathrm{D}}|} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T}_2^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{\ln(0.707)} \approx 2.885 \quad \text{e} \quad \mathrm{T}_3^{\mathrm{D}} \approx -\frac{1}{\ln(0.7416)} \approx 3.3454$$

La durata del transitorio di un sistema dinamico è circa 5 volte la costante di tempo dominante. L'equilibrio viene quindi raggiunto dai due sistemi rispettivamente in:

$$\Delta\mathrm{T}_2 \approx 14.427 \to 14 \sim 15 \qquad \Delta\mathrm{T}_3 \approx 16.727 \to 16 \sim 17$$

intervalli di tempo, approssimati agli interi vicini, essendo i sistemi tempo-discreti. In definitiva si può concludere che il sistema 2 esaurisce prima il transitorio, cioè raggiunge per primo l'equilibrio, anche se di poco.