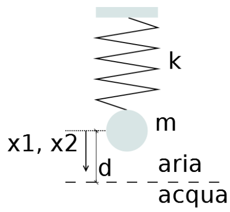
Politecnico di Milano, Corso di Modellistica e Simulazione

Esercizi sulla Stabilità, sul Transitorio, e sulla Raggiungibilità

1 Massa-molla in doppio mezzo

1.1 il problema

Una massa m è agganciata ad una molla di costante elastica k e può oscillare solo in direzione perfettamente verticale come mostrato nella figura. Nel suo moto attraversa due strati: nel primo (aria), si può trascurare l'attrito; nel secondo (acqua), posto a distanza d dalla posizione di riposo della molla, no. Si formuli un modello con cui stimare nel tempo la distanza della massa rispetto alla posizione di riposo della molla e se ne analizzi equilibrio e stabilità.



1.2 la soluzione

La massa m è sottoposta a due diverse configurazioni delle forze a seconda che si trovi nel primo mezzo (risultante tra forza elastica di richiamo della molla, proporzionale al suo allungamento, e forza peso) o nel secondo (si aggiunge l'attrito viscoso, proporzionale alla velocità della massa nell'acqua, con coefficiente h).
Introducendo la consueta coppia di variabili di stato (posizione x_1 e velocità x_2 della massa) i cui valori positivi sono scelti verso il basso, a partire dalla posizione di riposo della molla, il modello tempo-continuo può essere formulato come segue:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \qquad (1.1)\\
\dot{x}_2 &= \begin{cases} g - \frac{kx_1}{m} & \text{per } x_1 <= d \\ g - \frac{kx_1 + hx_2}{m} & \text{per } x_1 > d \end{cases}\\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda il calcolo degli equilibri, occorre imporre la condizione $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \bar{x}_1 = g\frac{m}{k} \end{aligned}$$

Il sistema dunque possiede un unico punto di equilibrio $E(g\frac{m}{k}; 0)$, che si troverà in uno dei due mezzi, aria per $g\frac{m}{k} < d$, acqua in caso contrario.
Il sistema tenderà a questo equilibrio solo se è asintoticamente stabile. Occorre dunque, a partire dalla matrice A, individuarne e analizzarne gli autovalori.

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}' & \text{per } x_1 <= d \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} = \mathbf{A}'' & \text{per } x_1 > d \end{cases}$$

Si tratta in ogni caso di un sistema del secondo ordine, quindi sono applicabili le condizioni su traccia e determinante:

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) < 0 \\ \mathsf{det}\,(\mathbf{A}) > 0 \end{aligned}$$

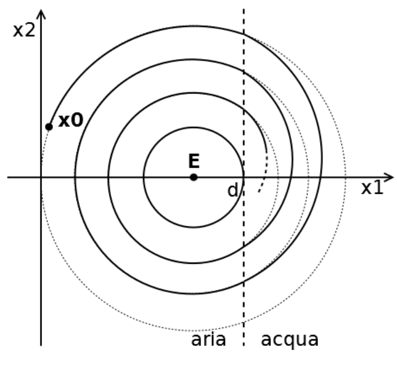
Nel primo caso si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}') = 0 \\ \mathsf{det}\,(\mathbf{A}') = \frac{k}{m} \end{aligned}$$

da cui, visto che la traccia è nulla, si può concludere che si tratta di un sistema al limite della stabilità (semplicemente stabile).

Considerando invece $\mathbf{A}''$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}'') = -\frac{h}{m} \\ \mathsf{det}\,(\mathbf{A}'') = \frac{k}{m} \end{aligned}$$

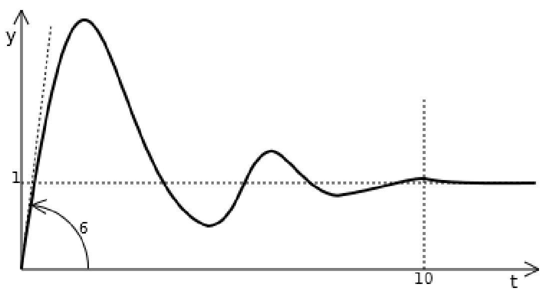


che invece ne dimostra l'asintotica stabilità.
Immaginando che l'equilibrio si trovi nel primo mezzo (quindi con $g\frac{m}{k} < d$) la rappresentazione della traiettoria è mostrata in figura. A partire da un'arbitraria condizione iniziale $\mathbf{x_0}$, a causa della semplice stabilità, il sistema percorre una traiettoria perfettamente circolare (con centro nell'equilibrio E) fino ad incontrare il secondo

mezzo. La presenza dell'attrito viscoso frena la massa e porta il sistema all'asintotica stabilità: la sua traiettoria si distacca quindi dalla precedente circonferenza fino a raggiungere la massima estensione della molla, per poi tornare al confine con l'aria ad una distanza inferiore rispetto a E. Da quel momento la traiettoria ricomincia a percorrere una circonferenza. Questo andamento binario continua fino a quando la massa resta confinata nell'aria: da quel momento, l'assenza dell'attrito, indurrà oscillazioni sempre uguali a se stesse, lungo una traiettoria ciclica destinata a ripetersi indefinitamente.
Come si comporterebbe il sistema dal punto di vista della sua traiettoria se si partisse con la massa nel secondo mezzo? e se il punto E si trovasse nel secondo mezzo?

2 Un problema inverso sul transitorio

2.1 il problema



Si consideri il movimento dell'uscita di un modello lineare, SISO, proprio, del secondo ordine, rappresentato in figura, in funzione dell'ingresso costante $\bar{u} = 1$, sapendo che agisce unicamente sulla prima componente dello stato con parametro pari a 1. Conoscendo lo stato iniziale, pari a $[1; 2]$, e che l'equilibrio è in $[0; -1]$, si formuli un possibile modello coerente anche con le altre informazioni riportate sul grafico.

2.2 la soluzione

La figura mostra delle oscillazioni nel transitorio dell'uscita che è rappresentato da una linea continua, e che si smorzano con $\Delta \mathrm{T} = 10$ unità di tempo, fino a ottenere un valore costante $\bar{y} = 1$, quindi di equilibrio.
Il modello deve quindi essere tempo-continuo e asintoticamente stabile e, affinchè ci siano le oscillazioni, deve avere i due autovalori complessi coniugati.
Genericamente può essere scritto come segue:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

e, nella traccia dell'esercizio, viene esplicitamente fornito il valore dei parametri $b_1 = 1$ e $b_2 = 0$. Le altre informazioni che si devono usare per determinare i valori dei parametri incogniti sono la condizione iniziale, compreso il valore della tangente pari a 6, e la condizione di equilibrio. In particolare, la conoscenza dei valori iniziali e di equilibrio di stato e uscita comportano le seguenti relazioni ricavate dalla trasformazione di uscita:

$$\begin{array}{llllllll} y(0) = c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) & \Rightarrow & 0 = c_1 + 2c_2 & \Rightarrow & c_1 = -2c_2 & \Rightarrow & c_1 = 2 \\ \bar{y} = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 & \Rightarrow & 1 = 0c_1 - c_2 & \Rightarrow & c_2 = -1 & & \end{array}$$

D'altra parte la conoscenza dello stato di equilibrio permette di scrivere, rispetto alle equazioni di transizione di stato:

$$\begin{array}{llllll} a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 & \Rightarrow & -a_{12} + 1 = 0 & \Rightarrow & a_{12} = 1 \\ a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 = 0 & \Rightarrow & -a_{22} = 0 & \Rightarrow & a_{22} = 0 \end{array}$$

Passiamo ora a sfruttare la conoscenza della durata del transitorio ΔT. Infatti si può affermare che $\Delta T \approx 5T_d$, dove T_d è la costante di tempo dominante del sistema, con $T_d = -1/\mathsf{Re}(\lambda_d)$, ricavabile quindi dall'autovalore dominante. Se $\Delta T \approx 10$ ne deriva che $T_d = 2$ e quindi $\mathsf{Re}(\lambda_d) = -1/2$

Per il sistema in esame, di ordine 2, sfruttando traccia e determinante di $\mathbf{A}$, gli autovalori possono essere ricavati come gli zeri del polinomio caratteristico, cioè dell'equazione

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

cioè

$$\lambda_{12} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

che devono corrispondere a due autovalori complessi coniugati. Quindi occorre che sotto radice ci sia un numero negativo, e, avendo già ricavato che $a_{22} = 0$,

$$\frac{(a_{11} + a_{22})}{2} = \frac{a_{11}}{2} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{11} = -1$$

La condizione che ci occorre per determinare anche l'ultimo parametro a_{21} si può ottenere a partire dall'informazione sulla tangente dell'uscita all'istante 0. Infatti deve valere che

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{t=0} = c_1\dot{x}_1(0) + c_2\dot{x}_2(0) = 2\,[a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) + \bar{u}] - [a_{21}x_1(0) + a_{22}x_2(0)] = 6$$

Sostituendo i valori dello stato iniziale e i parametri a_{ij} già individuati, si ottiene

$$2\,[-1 + 2 + 1] - [a_{21}] = 6 \quad \Rightarrow \quad 4 - a_{21} = 6 \quad \Rightarrow \quad a_{21} = -2$$

Resta da controllare la negatività dell'espressione sotto radice ottenuta nel calcolo degli autovalori:

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (-1 + 0)^2 - 4(0 + 2) = 1 - 8 = -7 < 0$$

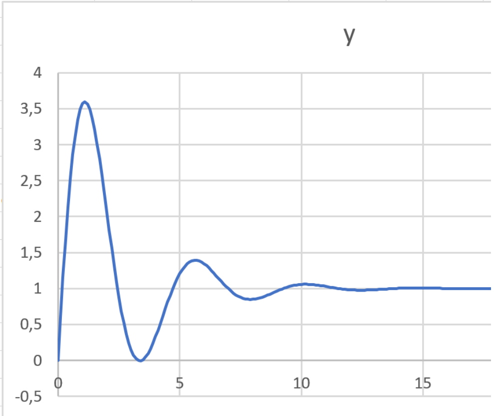
Concludendo, il sistema che origina il transitorio mostrato in figura è il seguente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e lo si può verificare simulando il sistema tramite il metodo di integrazione di Eulero, come riportato nel foglio Excel® sottostante

D10 =$D9+$B$7*($B$2*$D9+$C$2*$E9+$F$2*C$9)

	A	B	C	D	E	F
1						
2	**A =**	-1	1		**b =**	1
3		-2	0			0
4						
5	**cT =**	2	-1			
6						
7	dt =	0,1				
8	k	t	u	x1	x2	y
9	0	0	1	1	2	0
10	1	0,1	1	1,2	1,8	0,6
11	2	0,2	1	1,36	1,56	1,16
12	3	0,3	1	1,48	1,288	1,672
13	4	0,4	1	1,5608	0,992	2,1296
14	5	0,5	1	1,60392	0,67984	2,528
15	6	0,6	1	1,611512	0,359056	2,863968
16	7	0,7	1	1,586266	0,036754	3,135779



3 I sottospazi di raggiungibilità e non-raggiungibilità

3.1 Il problema

Dato il sistema

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 - \alpha x_2 + 3u$$

si disegnino i sottospazi di raggiungibilità e non raggiungibilità per $\alpha = 1$ e per $\alpha = 0$. Si dica inoltre se la configurazione $[1; 0]$ è raggiungibile in tempo finito in entrambi i casi.

3.2 La soluzione

Il sottospazio di raggiungibilità, cioè l'insieme delle configurazioni di stato raggiungibili dall'origine, quindi con il solo movimento forzato, è definito come il campo della matrice di raggiungibilità:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^0\mathbf{b} & \mathbf{A}^1\mathbf{b} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \cdots \end{bmatrix}$$

A partire quindi da

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

si ottiene la matrice

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3(1-\alpha) \end{bmatrix}$$

La dimensione del sottospazio di raggiungibilità è pari alla cardinalità di $\mathbf{R}$, cioè al numero di vettori indipendenti che la compongono, quindi al suo rango.

Nel primo caso, $\alpha = 1$, i due vettori sono indipendenti

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

come si può facilmente dimostrare calcolandone il determinante

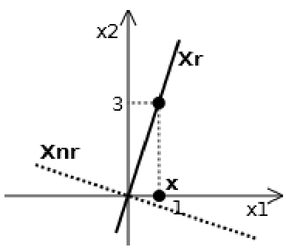
$$\mathsf{det}\,(\mathbf{R}) = -3 \neq 0$$

quindi $\mathbf{R}$ ha rango massimo, 2, pari all'ordine del sistema. In questo caso il sistema si dice completamente raggiungibile (C.R.) e il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio di stato, cioè, nel caso in esame, il piano x_1x_2. In un sistema C.R. qualsiasi configurazione di stato è raggiungibile dall'origine, dunque anche quella ipotizzata.
Nel secondo caso, $\alpha = 0$, si ottiene

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

dove, evidentemente, di vettori indipendenti ce n'è uno solo, infatti $\mathsf{det}\,(\mathbf{R}) = 3 - 3 = 0$, quindi

$$\mathsf{r}\,(\mathbf{R}) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \dim\left(\mathbb{X}_r\right) = 1$$



Il campo di $\mathbf{R}$, cioè il sottospazio di raggiungibilità $\mathbb{X}_r$, è dunque una retta passante per l'origine (che appartiene per definizione a $\mathbb{X}_r$). Per poterla disegnare, basta utilizzare gli elementi del vettore linearmente indipendente come coordinate di un punto nello spazio di stato, e poi individuarla congiungendolo con l'origine.
Il sottospazio di non raggiungibilità $\mathbb{X}_{nr}$ è invece ricavabile dalla condizione

$$\mathbb{X}_r \times \mathbb{X}_{nr} = \mathbb{X}$$

cioè è lo spazio perpendicolare a quello di raggiungibilità, quindi, dal punto di vista della sua dimensione, basta considerare la differenza tra dimensione dello spazio di stato (2) e dimensione di $\mathbb{X}_r$ (1). Quindi anche $\mathbb{X}_{nr}$ è una retta passante per l'origine (pur non contenendola) perpendicolare a quella già individuata.
Si può infine osservare che il punto richiesto non appartiene a $\mathbb{X}_r$, e dunque non è raggiungibile dall'origine.

4 Il trasferimento tra stati

4.1 il problema

Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\left(x_2 + x_3\right)\\ \dot{x}_2 &= x_1 + u\\ \dot{x}_3 &= -x_3\end{aligned}$$

si disegnino i sottospazi di raggiungibilità e non raggiungibilità e si dica se è possibile passare dalla configurazione $\mathbf{x}_i = [5;2;0]$ a $\mathbf{x}_f = [1;1;0]$ in tempo finito.

4.2 la soluzione

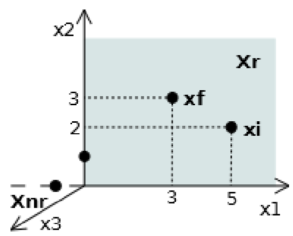
Per un sistema del terzo ordine la matrice di raggiungibilità è calcolabile come:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}\left(\mathbf{Ab}\right)\end{bmatrix}$$

Quindi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo presente una riga (la terza) costituita da soli zeri, è evidente che la matrice $\mathbf{R}$ ha determinante nullo, quindi $\mathsf{r}(\mathbf{R}) < n = 3$, cioè il sistema non è C.R. Un minore con determinante non nullo è, ad esempio, quello di ordine 2 in alto a sinistra, quindi $\mathsf{r}(\mathbf{R}) = 2 = \dim\left(\mathbb{X}_r\right)$.



Il campo di $\mathbf{R}$, cioè il sottospazio di raggiungibilità $\mathbb{X}_r$, è dunque un piano nello spazio di stato, passante per l'origine, e individuabile attraverso i vettori corrispondenti alle prime due colonne di $\mathbf{R}$ interpretate come coordinate di altrettanti punti. Si tratta quindi del piano x_1x_2.

Il sottospazio di non raggiungibilità, perpendicolare a quello di raggiungibilità, di dimensione pari a $3-2=1$ corrisponde all'asse x_3.

Sia il punto di partenza, sia quello finale appartengono a $\mathbb{X}_r$, e quindi è possibile il trasferimento dello stato in tempo finito.