Politecnico di Milano, Corso di Modellistica e Simulazione

Esercizi sulla Legge di controllo e sulla risposta in frequenza

1 Stabilizzabilità di un sistema tempo-discreto

1.1 il problema

Dato il sistema

$$x_1(t+1) = x_1(t) - x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = -2x_2(t) + u(t)$$

si risponda alle seguenti domande:

1. è stabilile?
2. è stabilizzabile con una legge di controllo completa?
3. e con una retro-azione sulla sola prima variabile di stato?
4. e sulla sola seconda?

1.2 la soluzione

La stabilità del sistema è analizzabile a partire dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

che, essendo triangolare, ha come autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Nessuno dei due autovalori rispettta la condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità dei sistemi lineari tempo-discreti ($|\lambda_i| < i \forall i = 1, \ldots, n$).

La successiva domanda riguarda una legge di controllo completa, cioè che sfrutti tutte le componenti dello stato

$$u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + v(t)$$

In questo caso può essere conveniente verificare la raggiungibilità del sistema. Se infatti fosse completa, questa proprietà sarebbe sufficiente (non necessaria) per garantire che il sistema è stabilizzabile. Individuati $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$, calcoliamo la matrice di raggiungibilità $\mathbf{R}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{det}\,(\mathbf{R}) = 1 \neq 0$$

il rango della matrice coincide dunque con l'ordine del sistema (2) che quindi è completamente raggiungibile. Per il teorema di Wonham si può quindi fissare ad arbitrio la dinamica del sistema controllato e, a maggior ragione, lo si può stabilizzare.
Per rispondere alle ultime due domande, trattandosi di leggi di controllo non complete, l'analisi della raggiungibilità non fornirebbe nessuna informazione utile. Occorre invece sostituire le leggi di controllo proposte e verificare la stabilità del sistema controllato.
La retroazione sulla prima variabile di stato corrisponde alla seguente legge di controllo:

$$u(t) = kx_1(t) + v(t)$$

Il sistema controllato diventa

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) - x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -2x_2(t) + kx_1(t) + v(t) \end{aligned}$$

da cui si desume la seguente matrice

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ k & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice non è più triangolare e, trattandosi di un sistema del secondo ordine, è preferibile utilizzare le condizioni su traccia e determinante:

$$\begin{aligned} \left|\mathsf{tr}\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)\right| &< 1 + \mathsf{det}\left(\tilde{\mathbf{A}}\right) \\ \left|\mathsf{det}\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)\right| &< 1 \end{aligned}$$

che, nel caso in esame, diventano

$$\begin{aligned} |-1| < 1 - 2 + k \quad &\Rightarrow \quad 1 < k - 1 \quad &\Rightarrow \quad k > 2 \\ |-2 + k| < 1 \quad &\Rightarrow \quad |k - 2| < 1 \quad &\Rightarrow \quad k < 3 \end{aligned}$$

Quindi il sistema è stabilizzabile con la retroazione sulla sola prima variabile di stato, a patto che il coefficiente della legge di controllo sia tale che $2 < k < 3$.
La retroazione sulla seconda variabile di stato corrisponde invece alla legge di controllo:

$$u(t) = kx_2(t) + v(t)$$

Il sistema controllato diventa

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) - x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -2x_2(t) + kx_2(t) + v(t) \end{aligned}$$

da cui si desume la seguente matrice

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k-2 \end{bmatrix}$$

La matrice è triangolare, e si può osservare come la legge di controllo incida unicamente sul secondo autovalore, quindi non permette di stabilizzare il sistema.

2 Stabilizzabilità di un sistema tempo-continuo

2.1 il problema

Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + u \\ y &= 3x_1 - x_2 \end{aligned}$$

si risponda alle seguenti domande:

1. è stabile?
2. è stabilizzabile con una legge di controllo completa?
3. e con una retro-azione solo su una variabile di stato?
4. e sull'uscita?

2.2 la soluzione

Come sempre, la stabilità del sistema è analizzabile a partire dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

che, essendo triangolare, ha come autovalori $\lambda_1 = -2 < 0$ e $\lambda_2 = 2 > 0$. Solo il primo autovalore rispetta la condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità dei sistemi lineari tempo-continui ($\mathsf{Re}\,(\lambda_i) < 0 \forall i = 1, \dots, n$), dunque il sistema non è asintoticamente stabile.
La possibilità di stabilizzare il sistema con una legge di controllo completa

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + v$$

si può esplorare controllando se il sistema è C.R. quindi calcolando, nota $\mathbf{A}$ e individuato $\mathbf{b}$, la matrice di raggiungibilità $\mathbf{R}$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{det}\,(\mathbf{R}) = 0$$

Il rango della matrice è dunque minore dell'ordine del sistema che quindi non è C.R. In questo caso il teorema di Wonham non ci fornisce indicazioni utili, in quanto non è una condizione necessaria per stabilizzare un sistema ma solo sufficiente.
Nel caso di legge completa (quindi con un vettore completo $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$), la matrice del sistema controllato diventa:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1+k_1 & 2+k_2 \end{bmatrix}$$

Si tratta di una matrice triangolare che ha per autovalori ancora $\lambda_1 = -2 < 0$, quindi che verifica la condizione di asintotica stabilità, e $\lambda_2 = 2 + k_2$. Affinchè il sistema controllato risulti stabile, occorre dunque imporre delle condizioni solo sul secondo parametro della legge di controllo

$$\lambda_2 = 2 + k_2 < 0 \Rightarrow k_2 < -2$$

mentre k_1 può essere fissato arbitrariamente. Naturalmente il sistema è risultato stabilizzabile solo perchè il primo autovalore verificava già originariamente la condizione di stabilità. Al contrario, se fosse stato positivo, nessuna legge di controllo lo avrebbe modificato, non essendo manipolabile attraverso l'ingresso.
Dalle osservazioni fatte risulta evidente che la retroazione solo sulla prima variabile di stato, che corrisponde alla legge di controllo $u = kx_1 + v$, non può stabilizzare il sistema. Infatti:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + kx_1 + v \end{aligned}$$

da cui si desume una matrice

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1+k & 2 \end{bmatrix}$$

in cui il secondo autovalore non può essere condizionato dal parametro introdotto, al contrario della retroazione sulla sola seconda variabile di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + kx_2 + v \end{aligned}$$

da cui si desume una matrice analoga a caso già analizzato

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2+k \end{bmatrix}$$

per la quale, affinchè risulti stabile, occorre come prima che $k < -2$.
La retroazione sull'uscita corrisponde invece alla legge di controllo:

$$u = ky + v$$

Per verificare se sia idonea a rendere stabile il sistema, occorre sostituirvi la trasformazione di uscita:

$$\dot{x}_1 = -2x_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + k\,(3x_1 - x_2) + v = (1+3k)x_1 + (2-k)x_2 + v$$

da cui si desume la seguente matrice

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1+3k & 2-k \end{bmatrix}$$

nella quale il secondo autovalore verifica la condizione di stabilità se

$$\lambda_2 = 2 - k < 0 \Rightarrow k > 2$$

3 Stabilizzabilità e transitorio

3.1 il problema

Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ y &= -x_1 \end{aligned}$$

si risponda alle seguenti domande:

1. è stabile?
2. è stabilizzabile con una retro-azione sull'uscita?
3. lo si può portare all'equilibrio in 5 unità di tempo? con quale legge di controllo?

3.2 la soluzione

Analizziamo la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

E' triangolare, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 2 > 0$ e $\lambda_2 = -1 < 0$. Il primo autovalore non rispetta la condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità dei sistemi lineari tempo-continui ($\mathsf{Re}\,(\lambda_i) < 0 \forall i = 1, \dots, n$), dunque il sistema non è asintoticamente stabile.
D'altra parte, attraverso la retroazione dell'uscita $u = ky + v$, sostituendo la trasformazione di uscita, il sistema controllato assume la seguente struttura

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + k(-x_1) + v$$

e quindi la matrice del sistema controllato diventa

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix}$$

Essendo del secondo ordine, si può controllare il segno di traccia e determinante

$$\mathsf{tr}\left(\tilde{\mathbf{A}}\right) < 0 \Rightarrow 1 > 0 \quad \forall k$$
$$\mathsf{det}\left(\tilde{\mathbf{A}}\right) > 0 \Rightarrow 2 + k > 0$$

quindi il segno della traccia non dipende dal parametro e dunque il sistema non è stabilizzabile attraverso la retroazione sull'uscita.
L'ultima domanda riguarda invece la possibilità di imporre una dinamica particolare al sistema, in particolare, se il transitorio deve durare 5 unità di tempo, occorre che la costante di tempo dominante del sistema controllato sia $T_d \approx \Delta T/5 = 1$, da cui otteniamo una condizione sull'autovalore dominante: $\mathsf{Re}\left(\lambda_d\right) = -1/T_d = -1$.
D'altra parte, se il sistema risultasse completamente raggiungibile, il teorema di Wonhan ci garantirebbe la controllabilità a piacere del sistema stesso

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{det}\left(\mathbf{R}\right) = -1$$

Essendo il rango della matrice pari all'ordine del sistema (2), esso è in effetti C.R.. Abbiamo dunque la garanzia che, con una legge di controllo completa, si possa portare il sistema all'equilibrio con un transitorio scelto a piacere.
Per trovare però il valore specifico dei parametri della legge di controllo che rispetti la condizione sul transitorio, occorre analizzare il sistema controllato da $u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + v$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ k_1 & k_2 - 1 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \mathsf{tr}(\mathbf{A})\lambda + \mathsf{det}(\mathbf{A}) = \lambda^2 - (1 + k_2)\lambda + (2k_2 - 2 - k_1)$$

Occorre ora imporre che gli zeri del polinomio, cioè gli autovalori, rispettino la condizione su quello dominante individuata precedentemente.
Piuttosto che calcolare gli zeri, è però più semplice ricordare le seguenti proprietà degli autovalori, valide per un sistema di ordine n qualsiasi:

$$\mathsf{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$
$$\mathsf{det}(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

In particolare, per il sistema di ordine 2 in esame, imponendo per comodità una coppia di autovalori reali e coincidenti con quello dominante richiesto, quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}(\mathbf{A}) &= 1 + k_2 = (-1) + (-1) = -2 && \Rightarrow \quad k_2 = -3 \\ \mathsf{det}(\mathbf{A}) &= 2k_2 - 2 - k_1 = (-1)(-1) = 1 && \Rightarrow \quad k_1 = 2k_2 - 3 = -9 \end{aligned}$$

Dunque la legge di controllo richiesta è $u = -9x_1 - 3x_2 + v$.
Come verifica, se sostituissimo i valori trovati nel polinomio caratteristico precedentemente trovato, otterremmo la parabola

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

i cui zeri sono appunto $\lambda_{1,2} = -1$.

4 Guadagno, risposta in frequenza e principio di sovrapposizione degli effetti

4.1 il problema

Si analizzi il deflusso da un lago (supposto lineare proporzionalmente al suo volume invasato tramite il coefficiente $k = 0.1\text{s}^{-1}$) in risposta ad un ingresso costituito da una parte antropica costante pari a $20\text{m}^3/\text{s}$, proveniente da un canale artificiale, e da un'altra, naturale, variabile nel tempo e modulata giornalmente (ciclo giorno-notte) e annualmente (ciclo stagionale) di ampiezza rispettivamente pari a $10\text{m}^3/\text{s}$ e $5\text{m}^3/\text{s}$.

4.2 la soluzione

Seguendo il suggerimento di approssimare il lago come un sistema tempo continuo lineare, con coefficiente di deflusso k

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u - kx \\ y &= ky \end{aligned}$$

il problema può essere ricondotto al calcolo dell'uscita a fronte di un segnale costituito dalla combinazione di un valore costante $\bar{U} = 20$ e due sinusoidi, la prima di frequenza giornaliera, la seconda annuale, di ampiezza rispettivamente pari a $U_1 = 10$ e $U_2 = 5$ quindi

$$u(t) = \bar{U} + U_1 sin(\omega_1 t) + U_2 sin(\omega_2 t)$$

con le due pulsazioni ricavabili a partire dalle periodicità indicate ($T_1 = 1$ e $T_2 = 365$), quindi con $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{1}$ e $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{365}$.
Grazie al principio di sovrapposizione degli effetti, valido per i modelli lineari, la risposta di una somma di segnali è pari alla somma delle singole risposte, ottenibili calcolando il

guadagno e la risposta in frequenza del sistema

$$\begin{aligned} y(t) &= \bar{Y} + Y_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + Y_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ \bar{Y} &= \mu \bar{U} \\ Y_1 &= R(\omega_1) U_1 \\ Y_2 &= R(\omega_2) U_2 \end{aligned}$$

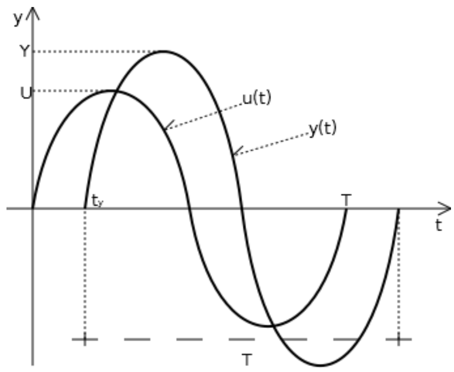
Iniziamo a calcolare il guadagno $\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$, cioè il rapporto tra uscita e ingresso all'equilibrio, quando $\dot{x} = 0$:

$$\bar{u} - k\bar{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\bar{u}}{k} \quad ; \quad \bar{y} = k\bar{x} = k\frac{\bar{u}}{k} = \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{Y} = \bar{U} = 20$$

Passiamo ora alla risposta in frequenza, rappresentata dalle funzioni $R(\omega)$ e $\phi(\omega)$, cioè modulo e argomento della funzione di trasferimento $G(\omega)$ che, per un SISO, è

$$G(\omega) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \left(i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{b}$$

con i unità immaginaria e $\mathbf{I}$ matrice identità di ordine pari a quello di $\mathbf{A}$.
Essa individua il segnale in uscita dal sistema lineare, che corrisponde ad una sinusoide con la stessa pulsazione, ma sfasata e di ampiezza differente, come mostrato dalla figura a fianco.

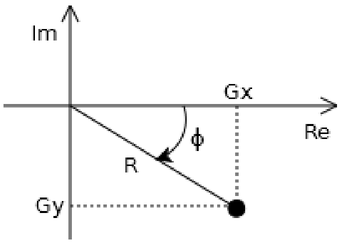


Per il sistema di ordine 1 in esame, la funzione $G(\omega)$ diventa

$$\mathbf{A} = -k \quad ; \quad \mathbf{b} = 1 \quad ; \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = k \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = k \left(i\omega 1 + k \right)^{-1} 1 = \frac{k}{k + i\omega}$$

da cui, moltiplicando numeratore e denominatore per la stessa quantità $k - i\omega$

$$G(\omega) = \frac{k(k - i\omega)}{k^2 - (i\omega)^2} = \frac{k}{k^2 + \omega^2}(k - i\omega)$$



cioè una funzione complessa che, in corrispondenza di un certo ω prefissato, assume un valore che può essere rappresentato qualitativamente come nella figura affianco, con parti reale e immaginaria rispettivamente pari a

$$G_x = \frac{k^2}{k^2 + \omega^2} \quad ; \quad G_y = -\frac{k\omega}{k^2 + \omega^2}$$

Possiamo ora ricavarne modulo e, assumendo convenzionalmente come positivi gli angoli misurati in senso anti-orario, argomento

$$\begin{aligned} R(\omega) &= |G(\omega)| = \frac{k}{k^2 + \omega^2} \left| (k - i\omega) \right| = \frac{k}{k^2 + \omega^2} \sqrt{k^2 + \omega^2} &&= \frac{k}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \\ \phi(\omega) &= \arg\left[G(\omega) \right] = &&= -\arctan\left(\frac{w}{k} \right) \end{aligned}$$

Sostituendo infine i valori di k e di ω, per i due segnali sinusoidali si ottiene rispettivamente

$$\begin{aligned}
R(\omega_1) &= \frac{0.1}{\sqrt{(0.1)^2 + (2\pi)^2}} = 0.0159 \quad \Rightarrow \quad Y_1 = 0.0159 \times 10 = 0.159 \\
\phi(\omega_1) &= -\arctan\left(\frac{2\pi}{0.1}\right) = -1.555 \text{ rad} \, [= -89.09^\circ] \\
R(\omega_2) &= \frac{0.1}{\sqrt{(0.1)^2 + (2\pi/365)^2}} = 0.985 \quad \Rightarrow \quad Y_2 = 0.985 \times 5 = 4.927 \\
\phi(\omega_2) &= -\arctan\left(\frac{2\pi/365}{0.1}\right) = -0.170 \text{ rad} \, [= -9.77^\circ]
\end{aligned}$$

Finalmente, combinando tutti i risultati parziali ottenuti, possiamo calcolare l'uscita complessiva dal lago

$$y(t) = 20 + 0.159 \sin(2\pi t - 1.555) + 4.927 \sin\left(\frac{2\pi}{365} t - 0.17\right)$$

nella quale è importante sottolineare come il segnale a frequenza più alta (quella corrispondente al ciclo giorno-notte) venga quasi completamente attenuato, al contrario di quello con la frequenza minore (ciclo stagionale) che resta praticamente inalterato. Il lago si comporta cioè come un filtro passa-basso.