

# Esercizi sull'Osservabilità e sull'analisi degli equilibri di sistemi non lineari tempo-continui

## 1 I SOTTOSPAZI DI OSSERVABILITÀ E NON-OSSERVABILITÀ

### 1.1 IL PROBLEMA

Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - \alpha x_2 + 3u \\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

si disegnino i sottospazi di osservabilità e non osservabilità per  $\alpha = 1$  e per  $\alpha = 0$ . Si dica inoltre se la configurazione  $[1; -1]$  è distinguibile dall'origine in entrambi i casi.

### 1.2 LA SOLUZIONE

La proprietà di osservabilità è duale rispetto a quella, già vista, di raggiungibilità, tranne per il fatto che, in questo caso, è il sottospazio di non osservabilità a fornire le informazioni più interessanti.

Il sottospazio di osservabilità, cioè l'insieme delle configurazioni di stato distinguibili dall'origine, è definito come il campo della matrice di osservabilità che, per un sistema SISO, è definita come:

$$\mathbf{O} = [\mathbf{c}^T \mathbf{A}^0 \quad \mathbf{c}^T \mathbf{A}^1 \quad \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \quad \dots]^T = [\mathbf{c} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c} \quad \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{c}) \quad \dots]$$

A partire quindi da

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\alpha \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

si ottiene la matrice di osservabilità

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - \alpha \end{bmatrix}$$

La dimensione del sottospazio di osservabilità è pari alla cardinalità di  $\mathbf{O}$ , cioè al numero di vettori indipendenti che la compongono, quindi al suo rango.  
 Nel primo caso,  $\alpha = 1$ , i due vettori sono indipendenti

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

come si può facilmente dimostrare calcolandone il determinante

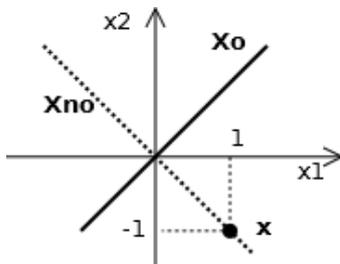
$$\det(\mathbf{O}) = -1 \neq 0$$

quindi  $\mathbf{O}$  ha rango massimo, 2, pari all'ordine del sistema. In questo caso il sistema si dice completamente osservabile (C.O.) e il sottospazio di osservabilità coincide con lo spazio di stato, cioè, nel caso in esame, il piano  $x_1x_2$ , esclusa l'origine. In un sistema C.O. qualsiasi configurazione di stato è infatti distinguibile dall'origine (meno l'origine stessa, ovviamente), dunque anche quella ipotizzata.  
 Nel secondo caso,  $\alpha = 0$ , si ottiene

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dove, evidentemente, di vettori indipendenti ce n'è uno solo, infatti  $\det(\mathbf{O}) = 1 - 1 = 0$ , quindi

$$r(\mathbf{O}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(\mathbb{X}_r) = 1$$



Il campo di  $\mathbf{O}$ , cioè il sottospazio di osservabilità  $\mathbb{X}_o$ , è dunque una retta passante per l'origine (che non appartiene per definizione a  $\mathbb{X}_o$ ). Per poterla disegnare, basta utilizzare gli elementi del vettore linearmente indipendente come coordinate di un punto nello spazio di stato, e poi individuarla congiungendolo con l'origine.

Il sottospazio di non osservabilità  $\mathbb{X}_{no}$  è invece ricavabile dalla condizione

$$\mathbb{X}_o \times \mathbb{X}_{no} = \mathbb{X}$$

cioè è lo spazio perpendicolare a quello di osservabilità, quindi, dal punto di vista della sua dimensione, basta considerare la differenza tra dimensione dello spazio di stato (2) e dimensione di  $\mathbb{X}_o$  (1). Quindi anche  $\mathbb{X}_{no}$  è una retta passante per l'origine (questa volta contenendola) perpendicolare a quella già individuata.

Si può infine notare come il punto richiesto appartenga a  $\mathbb{X}_{no}$ , e dunque non è osservabile, cioè non è distinguibile dall'origine.

## 2 OSSERVABILITÀ E STATI DISTINGUIBILI

### 2.1 IL PROBLEMA

Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - 2x_2 - 2u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= x_2 + 2x_3 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

si disegnino i sottospazi di osservabilità e non osservabilità e si dica se è possibile distinguere la configurazione  $\mathbf{x}_a = [1; 4; 0]^T$  dalla  $\mathbf{x}_b = [1; 1; -2]^T$ . La risposta potrebbe cambiare al variare dell'ingresso?

### 2.2 LA SOLUZIONE

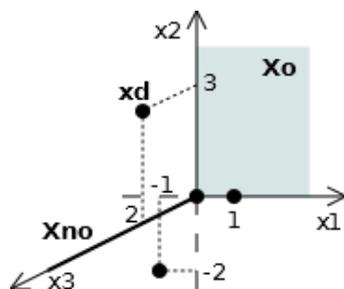
Per un sistema del terzo ordine la matrice di osservabilità è calcolabile come:

$$\mathbf{O} = [\mathbf{c} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c} \quad \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{c})]$$

Quindi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{c}^T = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo presente una riga (la terza) costituita da soli zeri, è evidente che la matrice  $\mathbf{O}$  ha determinante nullo, quindi  $r(\mathbf{O}) < n = 3$ , cioè il sistema non è C.O. Un minore con determinante non nullo è, ad esempio, quello di ordine 2 in alto a sinistra, quindi  $r(\mathbf{O}) = 2 = \dim(\mathbb{O}_r)$ .



Il campo di  $\mathbf{O}$ , cioè il sottospazio di osservabilità  $\mathbb{X}_o$ , è dunque un piano nello spazio di stato, passante per l'origine senza contenerla, e individuabile ad esempio attraverso i vettori corrispondenti alle prime due colonne di  $\mathbf{O}$  interpretate come coordinate di altrettanti punti. Si tratta quindi del piano  $x_1x_2$ .

Il sottospazio di non osservabilità, perpendicolare a quello di osservabilità, di dimensione pari a  $3 - 2 = 1$  corrisponde all'asse  $x_3$ .

Per verificare la distinguibilità delle due configurazioni di stato, occorre analizzare l'osservabilità della loro differenza:

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

che evidentemente non appartiene a  $\mathbb{X}_{no}$  e dunque è osservabile. Naturalmente il fatto che i due stati siano distinguibili non dipende in alcun modo dall'ingresso del sistema.

### 3 QUADRO DELLE TRAIETTORIE DI SISTEMI NON LINEARI CONTINUI

#### 3.1 IL PROBLEMA

Si disegni qualitativamente il quadro delle traiettorie per il seguente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_1^3 + x_1\end{aligned}$$

Si dica inoltre se potrebbero esistere dei cicli limite.

#### 3.2 LA SOLUZIONE

Occorre innanzitutto calcolare gli equilibri del sistema, imponendo la condizione  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ , da cui si ottiene il sistema algebrico non lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 &= 0 \\ \bar{x}_2 - \bar{x}_1(\bar{x}_1^2 - 1) &= 0\end{aligned}$$

le cui soluzioni sono i 3 punti di equilibrio  $E_1(0; 0)$ ,  $E_2(1; 0)$  e  $E_3(-1; 0)$ .

Per poterli classificare, occorre linearizzare il sistema nel loro intorno. Dallo Jacobiano si ottiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3x_1^2 + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Specializzando lo Jacobiano per i 3 punti di equilibrio, quindi sostituendo i valori di  $x_1$  e  $x_2$  corrispondenti, si ottengono altrettante matrici:

$$E_1) \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2) \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3) \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esse è possibile approssimare il comportamento del sistema non lineare, sostituendo localmente la dinamica di un sistema lineare di coordinate locali, cioè centrate sul punto di equilibrio, quindi, per il generico equilibrio  $E_i$

$$E_i) \begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}$$

La classificazione degli equilibri dipende dalla natura degli autovalori delle rispettive matrici  $\mathbf{A}_i$ . Per il primo equilibrio si ottiene:

$$\Delta_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

La presenza della parte immaginaria e la positività di quella reale conduce a classificare il primo equilibrio come un fuoco instabile, quindi localmente la traiettoria consisterà in

una spirale percorsa in modo da allontanarsi dall'equilibrio stesso. Per il secondo e terzo equilibrio, essendo le 2 matrici coincidenti, si ottiene:

$$\Delta_{A_2}(\lambda) = \Delta_{A_3}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + -2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

In questo caso, l'assenza della parte immaginaria e il segno discorde dei 2 autovalori conduce a classificare entrambi gli equilibri come 2 selle, quindi localmente ci saranno delle traiettorie non rettilinee a forma appunto di sella, tendenti asintoticamente a 2 traiettorie rettilinee, una percorsa verso l'equilibrio, l'altra in senso opposto. Per individuare queste ultime, occorre analizzare gli autovettori, individuabili a partire dalla soluzione dell'equazione matriciale  $\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \lambda\delta\mathbf{x}$ .

Sfruttando la prima riga di  $\mathbf{A}$  per il primo autovalore (instabile) si ottiene

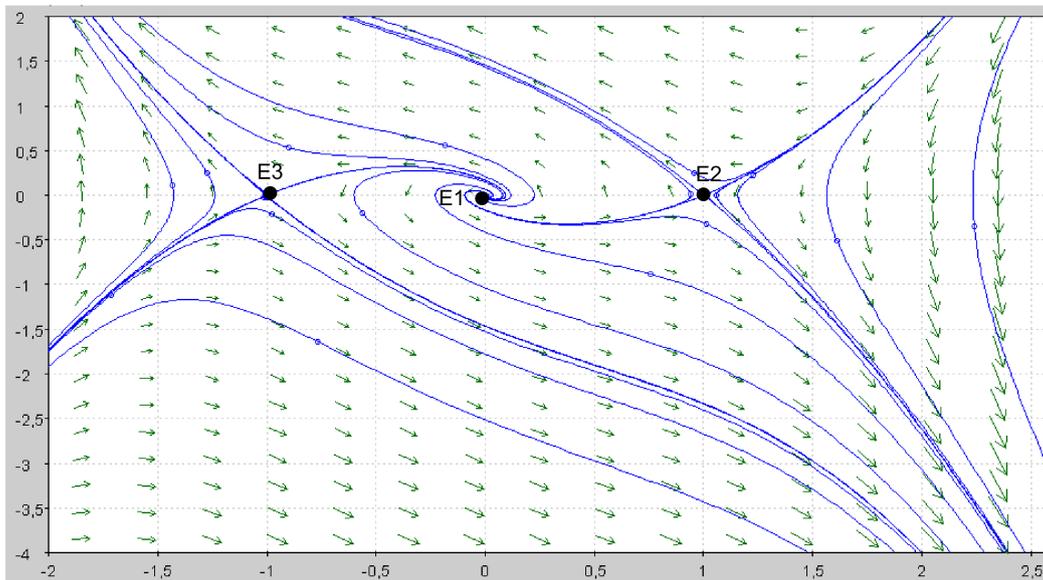
$$0 \times \delta x_1 - 1 \times \delta x_2 = 2 \times \delta x_1$$

La traiettoria rettilinea percorsa in modo da allontanarsi dall'equilibrio avrà dunque, in funzione delle coordinate locali  $\delta x_1$  e  $\delta x_2$ , equazione  $\delta x_2 = -2\delta x_1$ .

Invece di usare la prima riga di  $\mathbf{A}$ , per il secondo autovalore proviamo a sfruttare la seconda riga. Avremo

$$-2 \times \delta x_1 + 1 \times \delta x_2 = -1 \times \delta x_2$$

La seconda traiettoria rettilinea, percorsa in questo caso avvicinandosi all'equilibrio poichè dipendente dall'autovalore stabile, avrà allora equazione  $\delta x_2 = \delta x_1$ . Si può verificare facilmente che allo stesso risultato saremmo giunti ovviamente sfruttando la prima riga. Complessivamente il quadro delle traiettorie assume dunque la forma riportata in figura, realizzata con il software PPLANE (Attenzione: le misure sui 2 assi non sono uniformi). Si noti come il senso di rotazione intorno al fuoco sia coerente con l'indicazione fornita dalle due selle.



Per quanto riguarda i cicli limite, la loro assenza può essere dimostrata dal teorema di Poincaré e dal teorema di Bendixon. Il primo afferma che, condizione necessaria per la loro esistenza, è di poter individuare al loro interno un numero di equilibri pari esattamente al doppio del numero di selle aumentato di 1

$$n_e = 2n_s + 1$$

Si possono dunque in questo caso escludere tutte le possibilità tranne un ciclo limite intorno al solo fuoco ( $n_s = 0$ ). Il secondo, ancora una condizione solo necessaria, afferma invece che un eventuale ciclo limite debba attraversare il luogo dei punti in cui si annulla la funzione omonima

$$B = \text{tr}(\mathbf{J}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$$

Nel caso dell'esercizio la funzione di Bendixon è sempre pari a 1 in tutto lo spazio di stato, dunque non si annulla mai, dunque sicuramente non esistono cicli limite.

## 4 QUADRO DELLE TRAIETTORIE DI SISTEMI NON LINEARI CONTINUI

### 4.1 IL PROBLEMA

Considerando un ingresso costante pari a 1, si disegni qualitativamente il quadro delle traiettorie per il seguente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 - u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{3}x_1 + \left(1 - x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2\right)x_2 \end{aligned}$$

Si discuta inoltre la possibile esistenza dei cicli limite.

### 4.2 LA SOLUZIONE

Calcoliamo gli equilibri del sistema imponendo la condizione  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ . Si ottiene il sistema algebrico non lineare

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \pm 1 \\ -\frac{1}{3}\bar{x}_1 \pm \left(1 - \bar{x}_1^2 - \frac{1}{3}\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad 3\bar{x}_1^2 \pm \bar{x}_1 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \frac{\mp 1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{\mp 1 \pm 5}{6} \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono i 4 punti di equilibrio  $E_1(\frac{2}{3}; 1)$ ,  $E_2(-1; 1)$ ,  $E_3(1; -1)$  e  $E_4(-\frac{2}{3}; -1)$ . Passiamo alla loro classificazione calcolando e specializzando lo Jacobiano e i corrispon-

denti polinomi caratteristici

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ -\frac{1}{3} - 2x_1x_2 & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{4}{9} \end{bmatrix} & E_1) \quad \lambda^2 + \frac{4}{9}\lambda + \frac{10}{3} = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix} & E_2) \quad \lambda^2 + \lambda - \frac{10}{3} = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix} & E_3) \quad \lambda^2 + \lambda + \frac{10}{3} = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{4}{9} \end{bmatrix} & E_4) \quad \lambda^2 + \frac{4}{9}\lambda - \frac{10}{3} = 0 \end{cases}$$

Per il primo equilibrio si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 270}}{9} = \frac{-2 \pm i\sqrt{266}}{9}$$

La presenza della parte immaginaria e la negatività di quella reale conduce a classificare il primo equilibrio come un fuoco stabile, quindi localmente la traiettoria consisterà in una spirale percorsa in modo da avvicinarsi all'equilibrio stesso.

Per il secondo si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 120}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{129}}{6} \approx \begin{cases} 1.393 \\ -2.393 \end{cases}$$

In questo caso, l'assenza della parte immaginaria e il segno discorde dei 2 autovalori conduce a classificare l'equilibrio come una sella, le cui traiettorie rettilinee si possono individuare con l'analisi degli autovettori. Sfruttando la prima riga di  $\mathbf{A}$  per entrambi gli autovalori si ottiene

$$\delta x_2 \approx \begin{cases} 0.696 \delta x_1 & \text{per } \lambda \approx 1.393 \quad (\leftarrow \rightarrow) \\ -1.165 \delta x_1 & \text{per } \lambda \approx -2.393 \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{cases}$$

Passiamo ora al terzo equilibrio:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 120}}{6} = \frac{-3 \pm i\sqrt{111}}{6}$$

che corrisponde ad un secondo fuoco stabile.

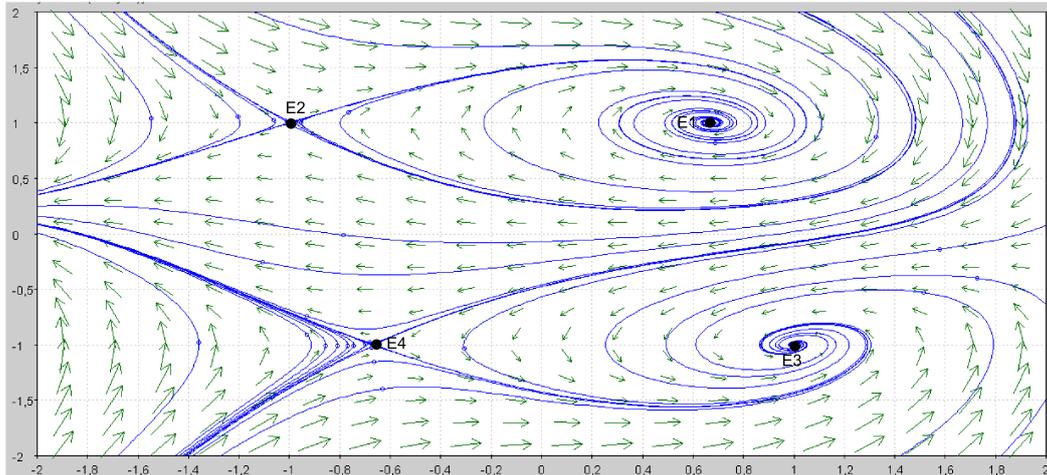
Infine per il quarto si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 270}}{9} = \frac{-2 \pm \sqrt{274}}{9} \approx \begin{cases} 1.617 \\ -2.061 \end{cases}$$

cioè una seconda sella, le cui traiettorie rettilinee si possono individuare sfruttando ancora la prima riga di  $\mathbf{A}$  per entrambi gli autovalori

$$\delta x_2 \approx \begin{cases} -0.808 \delta x_1 & \text{per } \lambda \approx 1.617 \quad (\leftarrow \rightarrow) \\ 1.03 \delta x_1 & \text{per } \lambda \approx -2.061 \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{cases}$$

Complessivamente il quadro delle traiettorie assume dunque la forma riportata in figura, realizzata con il software PPLANE (Attenzione: le misure sui 2 assi non sono uniformi).



Per quanto riguarda i cicli limite, con il teorema di Poincaré non si possono escludere i cicli limite intorno ai soli fuochi ( $n_s = 0$ ) o intorno a una sella e ai due fuochi ( $n_e = 2+1$ ). Anche il teorema di Bendixon non è in questo caso dirimente, infatti

$$B = \text{tr}(\mathbf{J}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1 - x_1^2 - x_2^2$$

quindi tutti e quattro i possibili cicli limite non esclusi dal teorema di Poincaré sono compatibili anche con il teorema di Bendixon, purchè intersechino una circonferenza di raggio unitario, cioè il luogo dei punti ove la funzione di Bendixon si annulla.

## 5 TRANSIZIONI CATASTROFICHE

### 5.1 IL PROBLEMA

Al variare del parametro  $p$  si studino gli equilibri e le possibili transizioni catastrofiche per il seguente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 + 2 \end{aligned}$$

Si disegni poi qualitativamente il quadro delle traiettorie per un valore di  $p$  scelto arbitrariamente.

## 5.2 LA SOLUZIONE

Calcoliamo gli equilibri del sistema imponendo la condizione  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ . Si ottiene il sistema algebrico non lineare

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 = -2(\bar{x}_1 + 1) &\Rightarrow \bar{x}_2 = -1 \mp \sqrt{1 - 2p} \\ 2\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1 + p = 0 &\Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2p}}{2} \end{aligned}$$

Queste soluzioni corrispondono a degli equilibri solo per valori reali, quindi solo se  $1 - 2p \geq 0 \rightarrow p \leq \frac{1}{2}$ . Per semplificare le successive equazioni poniamo ora  $a = \sqrt{1 - 2p}$ .

Ricapitolando quindi:

- se  $p < \frac{1}{2}$  esistono 2 equilibri distinti  $E_1 \left( \frac{a-1}{2}; -(a+1) \right)$  e  $E_2 \left( -\frac{a+1}{2}; a-1 \right)$ ;
- se  $p = \frac{1}{2}$  (quindi per  $a = 0$ ) i due equilibri coincidono in  $E \left( -\frac{1}{2}; -1 \right)$ ;
- se  $p > \frac{1}{2}$  infine, non esistono equilibri.

Passiamo alla loro classificazione calcolando e specializzando lo Jacobiano e i corrispondenti polinomi caratteristici

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -x_2 & -x_1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} a+1 & \frac{1-a}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & E_1 \quad \lambda^2 - (a+2)\lambda + 2a = 0 \\ \begin{bmatrix} 1-a & \frac{a+1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & E_2 \quad \lambda^2 + (a-2)\lambda - 2a = 0 \end{cases}$$

Per il primo equilibrio si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+2) \pm \sqrt{a^2 + 4a + 4 - 8a}}{2} = \frac{(a+2) \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2} = \frac{(a+2) \pm (a-2)}{2} = \begin{cases} a > 0 \\ 2 > 0 \end{cases}$$

che corrisponde ad un nodo instabile, avendo due autovalori reali positivi.

Per il secondo si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2-a) \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4 + 8a}}{2} = \frac{(2-a) \pm \sqrt{(a+2)^2}}{2} = \frac{(2-a) \pm (a+2)}{2} = \begin{cases} 2 > 0 \\ -a < 0 \end{cases}$$

che corrisponde ad una sella, avendo due autovalori reali distinti.

Infine, nel caso dell'unico equilibrio esistente per  $a = 0$ , con la linearizzazione non è possibile classificarlo:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E) \quad \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Un autovalore risulta infatti nullo.

Al diminuire del parametro  $p$  si assiste dunque alla presenza di una sella e di un nodo

instabile, la sovrapposizione dei due equilibri instabili, e infine l'assenza di equilibri. In ogni caso non scompare nessun attrattore, quindi le traiettorie non subiscono un cambiamento sostanziale per piccole variazioni del parametro, quindi non ci sono transizioni catastrofiche.

Resta da disegnare qualitativamente il quadro. Scegliendo per comodità il valore di  $p = 0 \rightarrow a = 1$  si dovrà disegnare un nodo instabile (autovalori  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$ ) in  $E_1(0; -2)$  e una sella (autovalori  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = -1$ ) in  $E_2(-1; 0)$ . Per quanto riguarda le traiettorie rettilinee, occorre procedere al calcolo degli autovettori, e in particolare sfruttando la prima riga di  $\mathbf{A}_1$  per il primo autovalore, si ottiene

$$2\delta x_1 = \delta x_1 \quad \Rightarrow \quad \delta x_1 = 0 \quad \text{per } \lambda = 1$$

Per il secondo occorre sfruttare invece la seconda riga per non ricadere in un'identità:

$$2\delta x_1 + \delta x_2 = 2\delta x_2 \quad \Rightarrow \quad \delta x_2 = 2\delta x_1 \quad \text{per } \lambda = 2$$

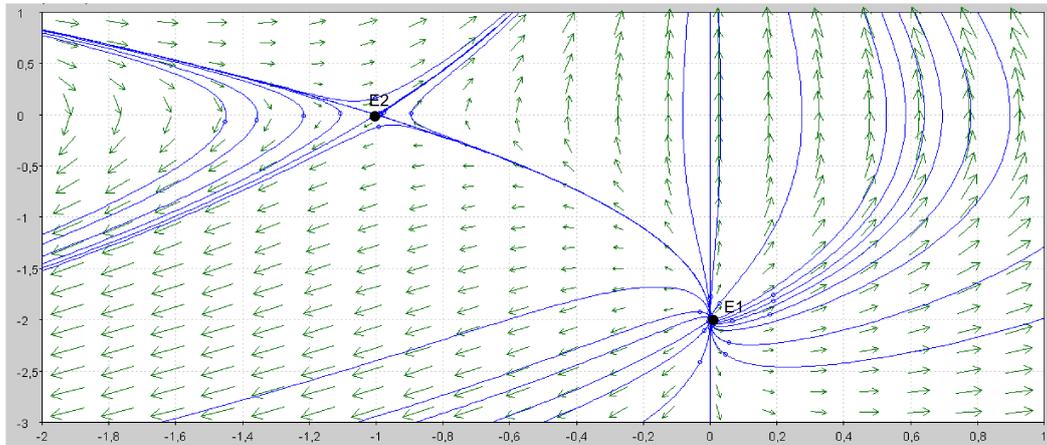
Passando alla sella, sfruttando la prima riga di  $\mathbf{A}_2$  per il primo autovalore si ottiene direttamente

$$\delta x_2 = 2\delta x_1 \quad \text{per } \lambda = 2 \quad (\leftarrow \rightarrow)$$

Per il secondo, sempre dalla prima riga

$$\delta x_2 = -\delta x_1 \quad \text{per } \lambda = -1 \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

Complessivamente il quadro delle traiettorie assume dunque la forma riportata in figura, realizzata con il software PPLANE (Attenzione: le misure sui 2 assi non sono uniformi).



## 6 TRANSIZIONI CATASTROFICHE

### 6.1 IL PROBLEMA

Al variare del parametro  $p$  si studino gli equilibri e le possibili transizioni catastrofiche per il seguente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - x_2 + p\end{aligned}$$

Si disegni poi qualitativamente il quadro delle traiettorie per un valore di  $p$  scelto arbitrariamente.

### 6.2 LA SOLUZIONE

Ancora una volta, calcoliamo gli equilibri del sistema imponendo la solita condizione  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ . Si ottiene il sistema algebrico non lineare

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 &= 0 \\ \bar{x}_1^2 &= p \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \pm\sqrt{p}\end{aligned}$$

Perché queste soluzioni corrispondano a degli equilibri occorre che sia  $p \geq 0$ , quindi:

- se  $p > 0$  esistono 2 equilibri distinti  $E_1(\sqrt{p}; 0)$  e  $E_2(-\sqrt{p}; 0)$ ;
- se  $p = 0$  i due equilibri coincidono nell'origine  $E(0; 0)$ ;
- se  $p < 0$  infine, non esistono equilibri.

Passiamo alla classificazione

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{p} & -1 \end{bmatrix} & E_1) \quad \lambda^2 + \lambda + 2\sqrt{p} = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\sqrt{p} & -1 \end{bmatrix} & E_2) \quad \lambda^2 + \lambda - 2\sqrt{p} = 0 \end{cases}$$

Per il primo equilibrio si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8\sqrt{p}}}{2}$$

che corrisponde ad un nodo o ad un fuoco stabile a seconda che  $p$  sia rispettivamente minore o maggiore di  $\frac{1}{64}$  come è facile verificare analizzando il segno del termine sotto radice.

Per il secondo si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8\sqrt{p}}}{2}$$

che invece corrisponde ad una sella, avendo due autovalori reali discordi. Infine, per  $p = 0$ , l'unico equilibrio esistente non può essere classificato mediante la linearizzazione, dato che un autovalore è nullo:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow E) \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1$$

Al diminuire del parametro  $p$  si assiste dunque alla presenza di un fuoco stabile (per  $p > \frac{1}{64}$ ) e una sella, poi un nodo stabile e una sella, poi alla sovrapposizione di nodo e sella, e infine l'assenza di equilibri. Dunque scompare un attrattore, e le traiettorie subiscono un brusco cambiamento per piccole variazioni del parametro intorno a 0, quindi si assiste ad una transizione catastrofica di tipo nodo-sella.

Per disegnare qualitativamente il quadro scegliamo per comodità proprio il valore di  $p = \frac{1}{64}$ . Si dovrà disegnare un nodo stabile (autovalori  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$ ) in  $E_1(\frac{1}{8}; 0)$  caratterizzato da un'unica traiettoria rettilinea di equazione  $\delta x_2 = -\frac{1}{2}\delta x_1$  e una sella (autovalori  $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} \approx (0.207; -1.207)$ ) in  $E_2(-\frac{1}{8}; 0)$ . Per quest'ultima, attraverso il calcolo degli autovettori, e in particolare sfruttando la prima riga di  $\mathbf{A}$  per entrambi gli autovalori, si ottiene

$$\delta x_2 \approx \begin{cases} 0.207 \delta x_1 & \text{per } \lambda \approx 0.207 \quad (\leftarrow \rightarrow) \\ -1.207 \delta x_1 & \text{per } \lambda \approx -1.207 \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{cases}$$

Complessivamente il quadro delle traiettorie assume dunque la forma riportata in figura, realizzata con il software PPLANE (Attenzione: le misure sui 2 assi non sono uniformi).

