Politecnico di Milano, Corso di Modellistica e Simulazione

Esercizi sulla programmazione lineare

1 La formulazione normale e standard, la soluzione grafica, le variabili di slack

1.1 il problema

La vostra azienda assembla due tipi di laptop, standard e lusso, che vende ottenendone guadagni unitari rispettivamente pari a 300 € e 500 €. Sapendo che ciascun laptop dei due tipi contiene rispettivamente 1 hard-disk e un kit base il primo, 2 hd e un kit premium il secondo, e che le scorte in magazzino sono di 120 hd, 60 kit base e 50 kit premium

- si formuli il problema di massimizzazione del guadagno, definendo opportune variabili di decisione;
- se ne dia la rappresentazione matriciale, anche in forma standard;
- lo si risolva graficamente;
- si individuino i vincoli attivi e quelli inattivi;
- si calcolino le variabili di slack all'ottimo.

1.2 la soluzione

Introducendo due variabili di decisione (z_1 e z_2) per rappresentare il numero di laptop assemblati standard e lusso, l'obiettivo J del problema decisionale, cioè il guadagno totale, può essere ottenuto moltiplicando i guadagni unitari per le rispettive quantità e poi sommando i valori ottenuti.
D'altra parte le variabili decisionali non possono essere numeri qualsiasi ma, oltre ad essere non negativi, in quanto rappresentano delle quantità, devono rispettare i vincoli del problema, cioè in questo caso la disponibilità in magazzino dei componenti. Si tratterebbe inotre di variabili intere, ma verranno trattate, dal punto di vista della soluzione, come se potessero essere reali.

Traducendo in formule quanto affermato, il problema può così essere formulato:

$$\begin{aligned}
&\max_{z_1,z_2} [300z_1 + 500z_2] \\
z_1 + 2z_2 &<= 120 \quad \text{(hard-disk)} \\
z1 &<= 60 \quad \text{(kit base)} \\
z2 &<= 50 \quad \text{(kit premium)} \\
z_1, z_2 &>= 0
\end{aligned}$$

Si può notare che l'equazione che rappresenta l'obiettivo e le disequazioni che rappresentano i vincoli sono tutte lineari nelle variabili decisionali, si tratta dunque di un *problema di programmazione lineare*. Introducendo il vettore delle decisioni $\mathbf{z}$, il vettore riga dei coefficienti dell'obiettivo $\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$, la matrice dei coefficienti dei vincoli $\mathbf{P}$ e, infine, il vettore dei termini noti dei vincoli $\mathbf{q}$, il problema può quindi essere formulato anche in *forma matriciale*:

$$\begin{aligned}
\max_{\mathbf{z}} \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} \quad &\Rightarrow \quad \max_{\mathbf{z}} \begin{bmatrix} 300 & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Pz} <= \mathbf{q} \quad &\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} <= \begin{bmatrix} 120 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} \\
\mathbf{z} >= 0 &
\end{aligned}$$

Si noti che le disequazioni devono essere eventualmente rese tutte concordi per poter essere rappresentate con un unico verso nella forma matriciale. Complessivamente esse in ogni caso definiscono l'insieme $\mathcal{Z}$ delle *soluzioni ammissibili.*
La *forma standard* dei problemi di programmazione lineare richiede che l'insieme $\mathcal{Z}$ sia definito solo tramite uguaglianze, sia cioè la seguente

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}} \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} \\
&\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} : \quad \mathbf{Pz} = \mathbf{q}; \quad \mathbf{z} >= 0\}
\end{aligned}$$

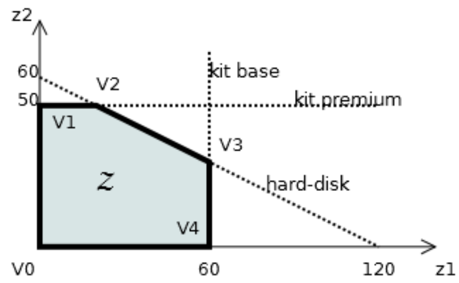
Per poter trasformare la forma non standard originale in quella standard, cioè per trasformare le disuguaglianze in uguaglianze, occorre introdurre tante variabili ausiliari quanti sono i vincoli. Ad esempio per gli hard-disk:

$$z_1 + 2z_2 <= 120 \quad \Rightarrow \quad z_1 + 2z_2 + s_1 = 120 \quad \text{con } s_1 = 120 - (z_1 + 2z_2)$$

La variabile ausiliaria s_1 è detta lo *slack* del primo vincolo. Essa misura quanto manca alla saturazione del vincolo, cioè in questo caso, per una particolare coppia di variabili di decisione, quanti sono gli hard-disk residui in magazzino. Aggiungendo altre due variabili di slack, s_2 e s_3, è possibile in questo modo ricondursi alla forma standard:

$$\max_{z_1,z_2} [300z_1 + 500z_2]$$
$$z_1 + 2z_2 + s_1 = 120 \quad \text{(hard-disk)}$$
$$z1 + s_2 = 60 \quad \text{(kit base)}$$
$$z2 + s_3 = 50 \quad \text{(kit premium)}$$
$$z_1, z_2, s_1, s_2, s_3 >= 0$$

Per quanto riguarda la *soluzione grafica* del problema originario, occorre analizzarlo nello spazio delle decisioni, quindi in un piano e in particolare, vista la non negatività di z_1 e z_2, nel primo quadrante.
Occorre innanzitutto disegnare l'insieme delle soluzioni ammissibili, rappresentando graficamente una alla volta le disequazioni presenti, e determinandone l'intersezione. Visto che, nello spazio delle decisioni i vincoli di un problema di programmazione lineare sono sempre semipiani (disuguaglianze) o rette (uguaglianze), l'insieme $\mathcal{Z}$ sarà sempre un poligono, delimitato o meno. Nel caso in esame risulta dunque evidente che $\mathcal{Z}$ corrisponde al poligono evidenziato nella figura a fianco.



Per trovare la *soluzione ottima*, occorrerebbe ora intersecare il poligono con il fascio di rette parallele con cui si interpreta geometricamente la funzione obiettivo (il cui coefficiente angolare è fissato dal rapporto tra gli elementi di $\mathbf{r}^T$) individuando il vertice o, al più, il lato, oltre il quale il fascio di rette non interseca più l'insieme delle soluzioni ammissibli.
In alternativa si può procedere per via analitica calcolando le coordinate di tutti i vertici e, per ciascuno, il valore della funzione obiettivo. I vertici naturalmente si possono individuare agevolmente risolvendo altrettanti sistemi di due equazioni in due incognite, considerando le coppie di vincoli corrispondenti.
Ad esempio per V_2: $\begin{cases} z_2 = 50 \\ z_1 + 2z_2 = 120 \end{cases}$
da cui si ricava $z_1 = 120 - 100 = 20$ e $J(20, 50) = 300 \times 20 + 500 \times 50 = 31000$

e per V_3: $\begin{cases} z_1 = 60 \\ z_1 + 2z_2 = 120 \end{cases}$
quindi $z_2 = (120 - 60)/2 = 30$ da cui $J(60, 30) = 300 \times 60 + 500 \times 30 = 33000$

Leggendo direttamente sul grafico le coordinate degli altri vertici e calcolando il valore corrispondente dell'obiettivo, si può quindi completare la seguente tabella riassuntiva

V	z_1	z_2	J
0	0	0	0
1	0	50	25000
2	20	50	31000
3	60	30	33000
4	60	0	18000

La soluzione ottima corrisponde al valore massimo dell'ultima colonna, quindi $J^* = 33000$ ottenuto in corrispondenza del terzo vertice, quindi per $z_1^* = 60$ e $z_2^* = 30$.
Il terzo vertice è stato ottenuto intersecando i vincoli relativi agli hard-disk e ai kit base: sono quindi questi due i vincoli attivi, mentre inattivo è il vincolo sui kit premium. All'ottimo, le variabili di slack corrispondenti ai vincoli attivi s_1^* e s_2^* saranno quindi nulle, perchè saranno consumati sia i 120 hard-disk sia i 60 kit base, mentre per il vincolo inattivo sarà $s_3^* = 50 - z_2^* = 20$ cioè avanzeranno in magazzino 20 kit premium.

2 La formulazione normale e duale, la soluzione grafica, i prezzi ombra

2.1 Il problema

La vostra azienda produce un certo bene in due varianti, A e B, al prezzo unitario rispettivamente di 2000 € e 3000 €, attraverso una lavorazione che prevede il completamento di 3 fasi. Di ciascuna fase si conosce la durata unitaria per ciascuna variante, e la capacità totale dei macchinari

Variante/Fasi	1	2	3
A	15'	5'	10'
B	10'	8'	1'
capacità	25^{h}	$16^{h}40'$	$8^{h}20'$

Sapendo che occorre rispettare dei contratti che prevedono di produrre almeno 10 unità della prima variante e 30 della seconda:

- si formuli il problema di massimizzazione del ricavo;
- se ne dia la rappresentazione matriciale, anche in forma duale;
- lo si risolva graficamente;
- si individuino i vincoli attivi e quelli inattivi;
- si calcolino le variabili di slack e i prezzi ombra all'ottimo.

2.2 La soluzione

Introduciamo due variabili di decisione, z_1 e z_2, per rappresentare le quantità prodotte delle due varianti: oltre ad essere non negative, in quanto anche in questo caso rappresentano delle quantità, devono rispettare le capacità dei macchinari che devono essere naturalmente convertite in minuti in modo da rispettare le unità di misura delle durate unitarie. Traducendo in formule quanto affermato, considerando che l'obiettivo J del problema decisionale è il ricavo totale, il problema può così essere formulato:

$$
\begin{aligned}
&\max_{z_1, z_2} [2z_1 + 3z_2] \\
15z_1 + 10z_2 &<= 25 * 60 = 1500 \quad \text{(fase 1)} \\
5z_1 + 8z_2 &<= 16 * 60 + 40 = 1000 \quad \text{(fase 2)} \\
10z_1 + z_2 &<= 8 * 60 + 20 = 500 \quad \text{(fase 3)} \\
z_1 &>= 10 \quad \text{(contratto su quantitativo minimo della variante A)} \\
z_2 &>= 30 \quad \text{(contratto su quantitativo minimo della variante B)} \\
z_1, z_2 &>= 0
\end{aligned}
$$

Anche in questo caso si può notare che le equazioni e le disequazioni introdotte sono tutte lineari nelle variabili decisionali, e quindi è un problema di programmazione lineare. Per poterne dare la rappresentazione matriciale, occorre definire prima di tutto il vettore delle decisioni $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ e il vettore riga dei coefficienti dell'obiettivo $\mathbf{r}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2000 & 3000 \end{bmatrix}$. Prima di costruire la matrice dei coefficienti dei vincoli $\mathbf{P}$ e il vettore dei termini noti $\mathbf{q}$, occorre notare come il verso dei primi 3 vincoli e degli ultimi 2 sia discorde. Occorre quindi operare una trasformazione di alcuni di essi, moltiplicandoli per -1, in modo da considerare un unico verso, scelto arbitrariamente. Ad esempio, per poter scrivere

$$
\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} \mathbf{r}^{\mathrm{T}} \mathbf{z} \\
&\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} : \quad \mathbf{P}\mathbf{z} <= \mathbf{q}; \quad \mathbf{z} >= 0\}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{P}$ e $\mathbf{q}$ dovranno essere

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 5 & 8 \\ 10 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 1000 \\ 500 \\ -10 \\ -30 \end{bmatrix}
$$

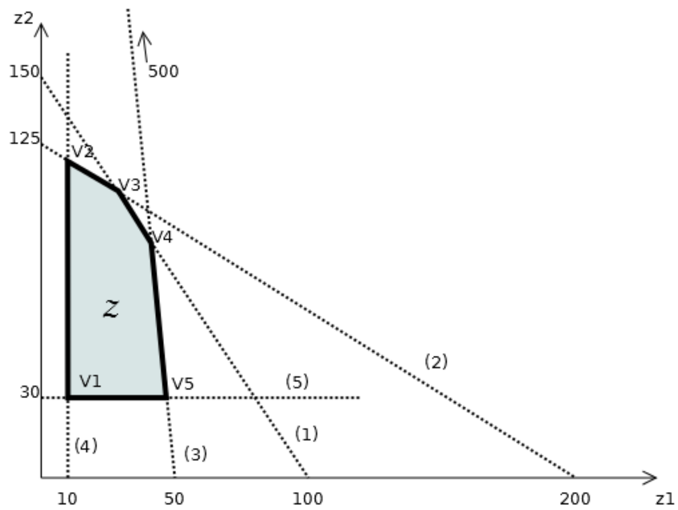
Per formulare il *problema duale*, occorre seguire le seguenti regole: 1) invertire la direzione di ottimalità; 2) scambiare decisioni con vincoli; 3) invertire le disuguaglianze dei vincoli. Per convenzione le variabili decisionali del problema duale vengono indicate con il simbolo λ, e rappresentano i *prezzi ombra* del problema originale detto *primale*, l'insieme delle soluzioni ammissibili è indicato con Λ, e infine l'obiettivo con Φ. In termini generali il problema duale può quindi essere formulato come segue

$$
\begin{aligned}
&\min_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \lambda \\
&\Lambda = \left\{\lambda : \quad \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \lambda >= \mathbf{r}; \quad \lambda >= 0\right\}
\end{aligned}
$$

che in forma esplicita diventa:

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5} [1500\lambda_1 + 1000\lambda_2 + 500\lambda_3 - 10\lambda_4 - 30\lambda_5]$$
$$15\lambda_1 + 5\lambda_2 + 10\lambda_3 - \lambda_4 >= 2000$$
$$10\lambda_1 + 8\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5 >= 3000$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 >= 0$$

Mentre il problema duale non può essere risolto graficamente perchè le variabili di decisione sono 5, il primale ne ha solo 2. La sua soluzione grafica, che avviene ancora nel primo quadrante dello spazio delle decisioni, è mostrata nella figura. Leggendo sul grafico le coordinate del vertice V_1 e risolvendo quattro sistemi di due equazioni in due incognite per determinare le coordinate dei vertici V_2, V_3, V_4 e V_5, si possono ricavare le informazioni mostrate nella seguente tabella:



V	z_1	z_2	J
1	10,00	30,00	110.000,00
2	10,00	118,75	376.250,00
3	28,57	107,14	378.571,43
4	41,18	88,23	347.059,82
5	47,00	30,00	184.000,00

La soluzione ottima risulta quindi quella in corrispondenza del terzo vertice: $J^* = 378.571,43$, quindi per $z_1^* = 28,57$ e $z_2^* = 107,14$.
I vincoli attivi saranno quindi il primo e il secondo, in corrispondenza dei quali le variabili di slack sono nulle. Per calcolare le altre occorre ricordare quanto detto a proposito del problema precedente, puntualizzando che le variabili di slack devono essere sempre positive, quindi nel caso del quarto (e del quinto) vincolo, occorre procedere così:

$$z_1 >= 10 \quad \Rightarrow \quad z_1 - s_4 = 10 \quad \text{con } s_4 = z_1 - 10$$

In definitiva all'ottimo si ottiene:

$$s_3^* = 500 - 10 \times 28,57 - 107,14 = 107,16$$
$$s_4^* = 28,57 - 10 = 18,57$$
$$s_5^* = 107,14 - 30 = 77,14$$

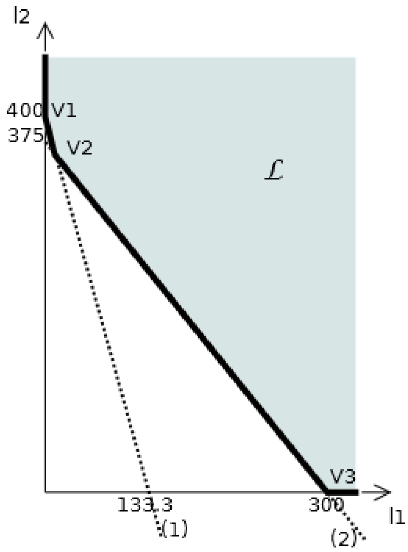
cioè avanzano oltre 107 minuti della capacità del macchinario operante sulla terza fase, mentre si producono rispettivamente 18,57 e 77,14 oltre le produzioni minime richieste dai contratti per le due varianti A e B.

Per quanto riguarda infine i *prezzi ombra*, essi rappresentano le disponibilità a pagare, in termini di obiettivo, degli allentamenti dei vincoli, in formula, per l'i-esimo vincolo:

$$\lambda_i := \frac{\partial J}{\partial q_i} \approx \frac{\Delta J}{\Delta q_i}$$

La definizione, che ricorre alle derivate parziali, può cioè essere approssimata con il rapporto incrementale considerando piccole variazioni del termine noto del vincolo, tali cioè da non modificare la scelta del vertice ottimo. Nel caso della programmazione lineare in particolare, grazie alla linearità di obiettivo e vincoli, il rapporto incrementale coincide con il valore della derivata parziale, fermo restando il limite della piccola variazione.
Dalla definizione è quindi evidente come i prezzi ombra corrispondenti ai vincoli inattivi (λ_3^*, λ_4^*, λ_5^*) siano nulli (per piccole variazioni dei rispettivi termini noti la soluzione ottima resterà esattamente la stessa, e quindi $\Delta J = 0$), mentre vanno calcolati quelli corrispondenti ai primi due vincoli, attivi.
Il calcolo può avvenire seguendo due differenti approcci: o si risolve il problema duale che, all'ottimo, in questo caso avrà anch'esso solo due variabili di decisione (appunto λ_1^*, e λ_2^*) o si utilizza la definizione stessa di prezzo ombra.
La prima strada consiste nel risolvere il seguente problema

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} [1500\lambda_1 + 1000\lambda_2]$$
$$15\lambda_1 + 5\lambda_2 >= 2000$$
$$10\lambda_1 + 8\lambda_2 >= 3000$$
$$\lambda_1, \lambda_2 >= 0$$



la cui soluzione grafica è mostrata nella figura. Leggendo sul grafico le coordinate dei vertici V_1 e V_3, e risolvendo un sistema di due equazioni in due incognite per determinare le coordinate del vertice V_2, si possono ricavare le informazioni mostrate nella tabella sottostante. La soluzione ottima risulta quindi quella in corrispondenza del secondo vertice: $\Phi^* = 378.571,43 = J^*$ cioè, com'era lecito prevedere, coincidente con l'ottimo del primale, da cui possiamo ricavare i due prezzi ombra: $\lambda_1^* = 14,29$ e $\lambda_2^* = 357,14$.

V	λ_1	λ_2	Φ
1	0,00	400,00	400.000,00
2	14,29	357,14	378.571,43
3	300,00	0,00	450.000,00

La seconda strada consiste invece nell'imporre una piccola variazione ai termini noti dei vincoli attivi. Partendo dal primo, si può risolvere nuovamente il problema di ottimizzazione ad esempio con
$\Delta q_1 = 1510 - 1500 = 10$
Il vertice V_3 corrispondente alla soluzione ottima, dopo la variazione si sposterebbe nella posizione $z_1^* = 29,71$ e $z_2^* = 106,43$ (coordinate ottenute risolvendo nuovamente il sistema costituito dai vincoli attivi 1 e 2) cui corrisponde

un valore dell'obiettivo pari a $J^* = 378.714,29$, quindi
$\Delta J = 378.714,29 - 378.571,43 = 142,86$
da cui si ricava appunto $\lambda_1^* = \frac{142,86}{10} = 14,29$
Per quanto riguarda il secondo vincolo, infine, imponendo $\Delta q_2 = 1010 - 1000 = 10$, il vertice V_3 si sposterebbe nella posizione $z_1^* = 27,14$ e $z_2^* = 109,29$ cui corrisponde un valore $J^* = 382.142,86$, quindi $\Delta J = 382.142,86 - 378.571,43 = 3571,43$ da cui si ricava appunto $\lambda_2^* = \frac{3571,43}{10} = 357,14$.

3 La formulazione normale e la soluzione grafica del duale, da cui ottenere quella del primale

3.1 il problema

Considerata la vostra cronica mancanza di liquidità, decidete di organizzare una rapina nel caveau di una banca, ove sono custoditi oro, pietre preziose, perle e coralli. Di ciascuna potenziale refurtiva sono noti peso, volume specifico e valore accordabile dal vostro ricettatore abituale, così come riportato dalla seguente tabella:

Caratteristiche/Refurtiva	oro	pietre preziose	perle	coralli
peso	5	8	8/3	6
volume	5	20	4	3
valore	10	20	6	3

Sapendo che, data la vostra scarsa preparazione fisica, siete in grado di scappare con una refurtiva che abbia al massimo un peso pari a 25 e un volume pari a 30, su quale combinazione della refurtiva vi orientereste?

3.2 la soluzione

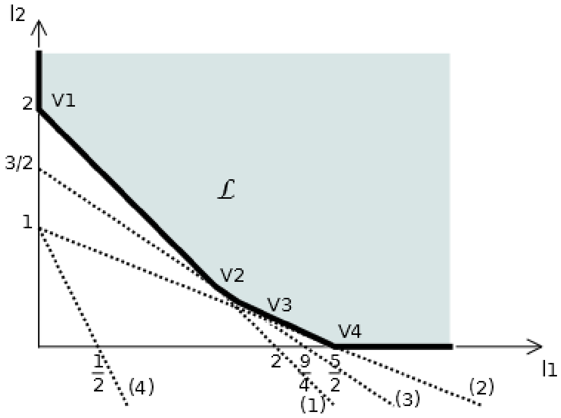
Introduciamo 4 variabili di decisione, z_1, z_2, z_3 e z_4 per rappresentare le quantità di ognuna delle potenziali refurtive: come in precedenza, oltre ad essere non negative, devono rispettare le nostre (scarse) capacità atletiche per sperare in una fuga propizia. Considerato che l'obiettivo J del problema decisionale consiste nel ricavo totale, il problema può essere così formulato:

$$\max_{z_1,z_2,z_3,z_4} [10z_1 + 20z_2 + 6z_3 + 3z_4]$$
$$5z_1 + 8z_2 + \frac{8}{3}z_3 + 6z_4 <= 25 \quad \text{(peso)}$$
$$5z_1 + 20z_2 + 4z_3 + 3z_4 <= 30 \quad \text{(volume)}$$
$$z_1, z_2, z_3, z_4 >= 0$$

Evidentemente si tratta di un problema di programmazione lineare con 4 variabili decisionali, che quindi non può essere risolto per via grafica perchè necessiterebbe un'analisi in uno spazio quadridimensionale.

Si può però notare che i vincoli sono soltanto due, quindi il passaggio alla formulazione duale risulta particolarmente vantaggiosa.
Ricordando le regole per il passaggio al duale e in particolare lo scambio delle decisioni con i vincoli, infatti, il problema duale assume la dimensione di un problema con 2 sole variabili decisionali e 4 vincoli, più precisamente occorre risolvere:

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} [25\lambda_1 + 30\lambda_2]$$
$$5\lambda_1 + 5\lambda_2 >= 10$$
$$8\lambda_1 + 20\lambda_2 >= 20$$
$$\frac{8}{3}\lambda_1 + 4\lambda_2 >= 6$$
$$6\lambda_1 + 3\lambda_2 >= 3$$
$$\lambda_1, \lambda_2 >= 0$$



In figura è mostrata la soluzione nel consueto primo quadrante dello spazio delle decisioni. Leggendo sul grafico le coordinate del vertice V_1, V_2 e V_5 e risolvendo 2 sistemi di 2 equazioni in 2 incognite per determinare le coordinate dei vertici V_3, e V_4, si possono ricavare le informazioni mostrate nella tabella sottostante.

V	λ_1	λ_2	Φ
1	0	2	60,000
2	3/2	1/2	52,500
3	15/8	1/4	54,375
4	5/2	0	62,500

La soluzione ottima risulta quindi quella in corrispondenza del secondo vertice: $\Phi^* = 52,5$, quindi per $\lambda_1^* = 1,5$ e $\lambda_2^* = 0,5$ che rappresentano i prezzi ombra del primale.
Si può notare che i vincoli attivi del duale, con cui è stato individuato il vertice V_2, sono il primo e il terzo, mentre il secondo e il quarto sono non attivi. Ricordando lo scambio che avviene nel passaggio da primale a duale tra decisioni e vincoli, si può desumere che solo la prima e la terza variabile decisionale del primale (che rappresentano i prezzi ombra del primo e terzo vincolo del duale), all'ottimo, avranno valori diversi da zero, mentre la seconda e la quarta, sempre all'ottimo, saranno nulle.
La soluzione del problema primale potrà quindi essere individuata semplificandolo nel seguente modo:

$$\max_{z_1,z_3} [10z_1 + 6z_3]$$
$$5z_1 + \frac{8}{3}z_3 <= 25 \quad \text{(peso)}$$
$$5z_1 + 4z_3 <= 30 \quad \text{(volume)}$$
$$z_1, z_3 >= 0 \quad \text{e con} \quad z_2 = z_4 = 0$$

Dovendo essere $z_1^* \neq 0$ e $z_3^* \neq 0$, e entrambi i vincoli attivi (avendo dei prezzi ombra diversi da 0) il vertice ottimo si ricaverà proprio dall'intersezione dei due vincoli, quindi risolvendo il sistema di 2 equazioni in 2 incognite $\begin{cases} 5z_1 + \frac{8}{3}z_3 = 25 \\ 5z_1 + 4z_3 = 30 \end{cases}$.
Sottraendo la prima equazione alla seconda, si ottiene $\frac{4}{3}z_3^* = 5 \Rightarrow z_3^* = \frac{15}{4}$ da cui si ottiene $z_1^* = 6 - \frac{4}{5}z_3^* = 3$. Se, come verifica, sostituiamo infine i valori ottenuti nell'equazione che rappresenta l'obiettivo, otteniamo $J^* = 10z_1^* + 6z_3^* = 10 \times 3 + 6 \times \frac{15}{4} = 52,5 = \Phi^*$.