

## Esercizi sull'ottimizzazione combinatoria

## 1 ALBERO MINIMO

## 1.1 IL PROBLEMA

Occorre costruire un sistema di collegamenti elettrici per alimentare una serie di utenze. Uno studio preliminare di fattibilità ha individuato i possibili collegamenti e i costi totali per la realizzazione di ciascun tratto, riportati nella tabella.

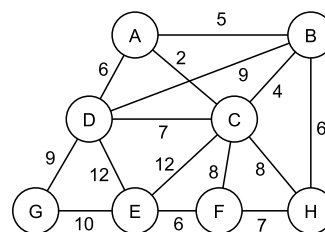
Si determinino i collegamenti ottimi e il costo totale corrispondente.

utenze	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	5	2	6	-	-	-	-
B		-	4	9	-	-	-	6
C			-	7	12	8	-	8
D				-	12	-	9	-
E					-	6	10	-
F						-	-	7

## 1.2 LA SOLUZIONE

I problemi combinatori affrontati condividono lo strumento di rappresentazione dello spazio delle soluzioni ammissibili, il grafo, i cui archi sono associati alle variabili di decisione, quindi binarie, cioè indicanti se il tal arco appartiene alla soluzione ottima o no. Nel caso specifico, il grafo, non orientato, è mostrato nella figura a fianco, nel quale i pesi associati a ciascun arco ne rappresentano i relativi costi di realizzazione. I collegamenti sono bidirezionali e quindi occorre individuare l'insieme di quelli che permettono la connessione di tutti i nodi a costo totale minimo, quindi senza ridondanze. La configurazione cercata, *aciclica*, è quindi un albero, e la soluzione prende proprio il nome di *albero minimo*.

In molti tipi di problemi combinatori, ma non in questo, il grafo è anche lo strumento su cui si basa il metodo di risoluzione. In questo caso invece si utilizza quello che è noto come *algoritmo greedy* perchè consiste nella rassegna esaustiva dei possibili archi ordinati in modo crescente con il peso: nel caso di pesi coincidenti è indifferente l'ordine con cui li si analizza, ma occorre sempre verificare che l'arco non chiuda un ciclo e che ancora non si siano collegati tutti i nodi: in questi casi l'arco va inserito nella soluzione, altrimenti



no. Si tratta dunque di compilare una tabella come la seguente, nella quale verificare le condizioni appena elencate, e aggiornare il costo cumulato.

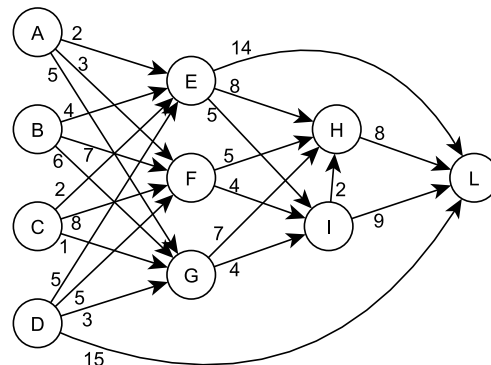
arco	costo	chiude un ciclo?	costo totale	tutti i nodi sono stati collegati?
AC	2	no	2	no
BC	4	no	6	no
AB	6	si (ciclo ABC)	6	no
AD	6	no	12	no
BH	6	no	18	no
EF	6	no	24	no
DC	7	si (ciclo ADC)	24	no
FH	7	no	31	no
CF	8	si (ciclo BCFH)	31	no
CH	8	si (ciclo BCH)	31	no
DG	9	no	40	si

Dalla tabella ricaviamo il valore ottimo dell'obiettivo,  $J^* = 40$ , e la soluzione ottima, costituita dagli archi: AC, BC, AD, BH, EF, FH e DG

## 2 CAMMINI MINIMI

### 2.1 IL PROBLEMA

Un ospedale L necessita con urgenza del plasma che può provenire dagli ospedali A, B, C e D. Tra i possibili percorsi mostrati dal grafo nel quale i pesi degli archi rappresentano una stima dei tempi di percorrenza, quale percorso conviene scegliere?

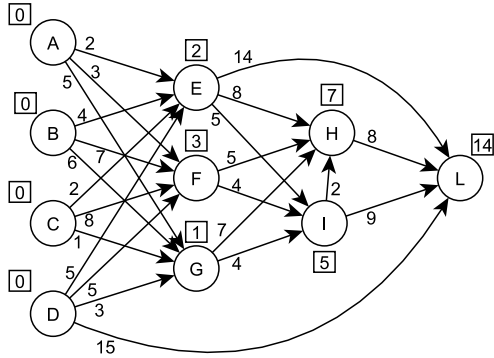


### 2.2 LA SOLUZIONE

Il grafo, anche in questo caso, rappresenta i percorsi ammissibili, e occorre individuare, rispettando l'orientamento degli archi, la successione a tempo minimo per andare da uno dei nodi di partenza al nodo di arrivo. Si tratta quindi di individuare il cosiddetto *cammino minimo* che, più in generale, potrebbe anche riguardare casi con un'unica partenza e molte destinazioni, sono possibili cioè tutte le combinazioni tra numerosità dei punti di partenza e quella dei punti di arrivo.

L'algoritmo risolvete prende il nome di *metodo delle etichette*, che consiste nello scomporre il problema globale in sottoproblemi locali prendendo in considerazione tutti i possibili cammini in ingresso a un nodo e scegliendo il più conveniente. In questo modo si ottiene il valore del tempo minimo necessario ad arrivare in un certo nodo, che ne diventa l'etichetta (da cui il nome del metodo). L'algoritmo viene inizializzato etichettando il o i nodi di partenza con il valore 0, per poi passare in rassegna gli altri nodi,

etichettando quelli i cui archi in ingresso provengono da nodi già etichettati.



Ad esempio, per etichettare il nodo E, occorre risolvere il seguente problema:

$$\min\{0 + 6; 0 + 4; 0 + 2; 0 + 5\} = 2$$

Considerando i 4 archi entranti al nodo E, che partono rispettivamente dai nodi A, B, C e D, il tempo minimo per raggiungerlo è dunque 2, che ne diventa l'etichetta. Passiamo al nodo F:

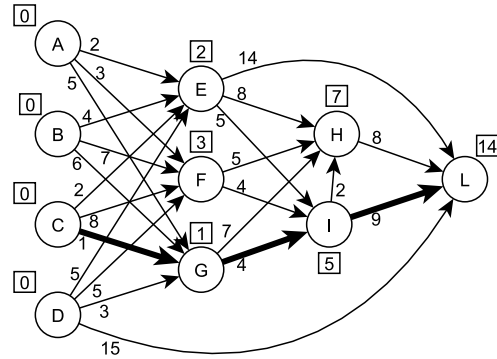
$$\min\{0 + 3; 0 + 7; 0 + 9; 0 + 5\} = 3$$

e così via. Attenzione a non etichettare il nodo H prima di aver etichettato il nodo I, per il quale occorre trovare

$$\min\{2 + 5; 3 + 4; 1 + 4\} = 5$$

Una volta etichettato il nodo finale, il valore ottenuto corrisponde al valore ottimo dell'obiettivo, in questo caso  $J^* = 14$  (eventualmente, nel caso di più nodi finali, si sceglie il minimo).

Lo stesso grafo, letto a ritroso, permette di ottenere la successione delle decisioni ottime, ricostruendo quale (o quali) sono stati gli archi attraverso i quali è stata assegnata una certa etichetta. Nel caso del problema in esame, tale successione è unica:  $C \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow L$ .



Come cambierebbe la soluzione se non fosse più percorribile l'arco  $GI$ ?

*Sol:*  $J^* = 15$ , successione ottima  $DL$

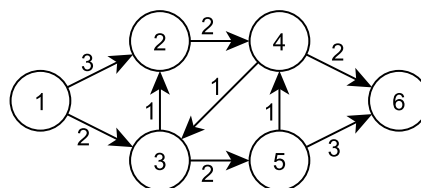
E se non ci fosse neanche  $DL$ ?

*Sol:*  $J^* = 16$ , successioni ottime in questo caso, tutte equivalenti dal punto di vista di  $J^*$ , sono:  $C \rightarrow E \rightarrow L$ ;  $A \rightarrow E \rightarrow L$ ;  $A \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow L$ ;  $C \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow L$ ;  $A \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow L$ ;  $C \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow L$ ;  $A \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow L$ .

### 3 TAGLIO MINIMO

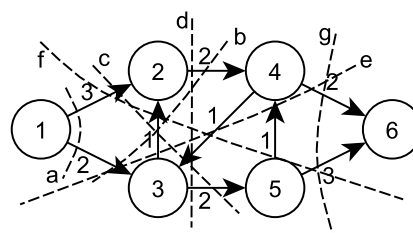
#### 3.1 IL PROBLEMA

Si consideri la rete di adduzione rappresentata nel grafo, nel quale i pesi degli archi rappresentano le capacità (in portata): qual'è la massima portata che può passare dal nodo 1 al nodo 6?



#### 3.2 LA SOLUZIONE

La portata massima transitante dal nodo di partenza a quello di destinazione dipende dal cosiddetto *collo di bottiglia*, cioè dalla strozzatura nel sistema che rappresenta il limite alla portata. La soluzione è per questo chiamata *taglio minimo* e può essere individuata con l'algoritmo di *Ford-Fulkerson*.



Esso consiste nell'ipotizzare delle partizioni nel sistema tra nodi comunque contenenti quello di origine (A), e nodi contenenti quello di destinazione (B). Per ogni taglio individuato, occorre conteggiare la somma delle portate (cioè dei pesi degli archi) che possono transitare da A a B, tenendo quindi conto dell'orientamento degli archi.

taglio	insieme A	insieme B	obiettivo
a	<b>1</b>	<b>2,3,4,5,6</b>	$3+2=5$
b	<b>1,2</b>	<b>3,4,5,6</b>	$2+2=4$
c	<b>1,3</b>	<b>2,4,5,6</b>	$3+1+2=6$
d	<b>1,2,3</b>	<b>2,4,5,6</b>	$2+2$
e	<b>1,2,4</b>	<b>3,5,6</b>	$2+1+2=5$
f	<b>1,3,5</b>	<b>2,4,6</b>	$3+1+1+3=8$
g	<b>1,2,3,4</b>	<b>5,6</b>	$2+2$
...	<b>1,...</b>	<b>...,6</b>	

Il taglio per il quale questa somma è minima permette di individuare il valore ottimo dell'obiettivo e l'insieme di archi che rappresentano il collo di bottiglia.

Ad esempio, considerando i tagli mostrati in figura, si ottengono i valori riportati in tabella (occorrerebbe completarla con tutte le possibili partizioni). L'obiettivo corrisponde al valore minimo tra quelli calcolati, cioè in

questo caso  $J^* = 4$  in corrispondenza dei tagli *b*, *d* e *g*.

## 4 CAMMINI MASSIMI (PERT)

### 4.1 IL PROBLEMA

Un progetto prevede il completamento di alcune fasi, la cui durata (in mesi) è nota e sono anche note le regole di precedenza da rispettare tra una fase e l'altra.

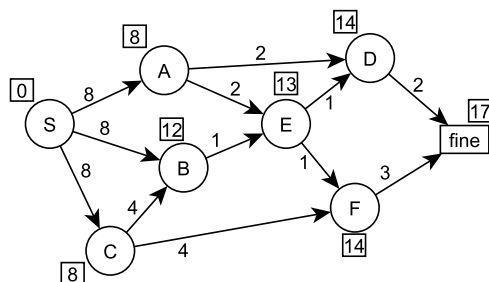
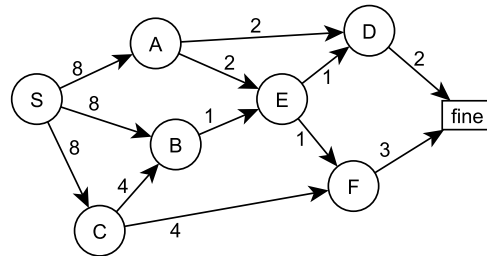
fase	S	A	B	C	D	E	F
durata	8	2	1	4	2	1	3
precedenze	-	S	C,S	S	A,E	A,B	E,C

In quanto tempo può essere completato il progetto? con quale successione delle fasi? Se ne dia anche la rappresentazione temporale.

### 4.2 LA SOLUZIONE

Anche in questo caso l'insieme delle soluzioni ammissibili va rappresentato con un grafo, che va costruito seguendo le seguenti regole

1. disegnare un nodo per ogni fase, a partire dalle fasi che non devono rispettare regole di precedenza fino a quelli che non ne impongono;
2. disegnare un arco orientato per ogni regola di precedenza, a partire dal nodo che rappresenta una fase da completarsi prima di poter iniziare la fase rappresentata dal nodo di arrivo;
3. sugli archi si introducono i pesi, pari alla corrispondente durata della fase che rappresenta il nodo di partenza di ciascun arco;
4. per poter inserire anche durate delle fasi che non impongono precedenza, occorre introdurre un nodo finale fittizio, da raccordare proprio a queste fasi finali.



le etichette: stesso nome ma significato e modo di ottenerle diverso rispetto a quanto visto in precedenza. Se, nel problema del cammino minimo, l'etichetta rappresenta il tempo

Nel grafo va individuato il cosiddetto *percorso critico* anche detto *cammino massimo*, cioè la successione ottimale delle fasi che determina il tempo minimo di realizzazione del progetto. Si noti la somiglianza con il problema già affrontato del cammino minimo: la differenza è che in questo caso tutte le fasi devono essere completate.

La soluzione la si ottiene con il *metodo delle etichette*:

minimo per partire da un certo nodo, in questo caso l'etichetta rappresenta il tempo prima del quale non è possibile partire a realizzare la fase corrispondente al nodo. Per determinarla occorre dunque in questo caso risolvere un problema di massimo rispetto agli archi entranti invece che di minimo. Anche in questo caso l'algoritmo viene inizializzato etichettando il o i nodi di partenza con il valore 0, per poi passare in rassegna gli altri nodi, etichettando quelli i cui archi in ingresso provengono da nodi già etichettati.

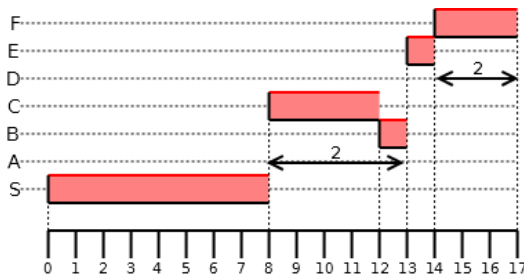
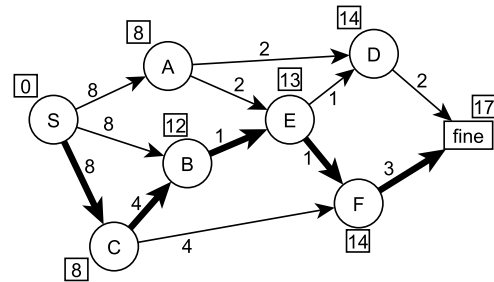
Il nodo  $A$  ha un unico arco entrante, quindi la sua etichetta è 8. Il nodo  $B$  può essere etichettato solo dopo aver etichettato  $C$ , dopodichè occorre risolvere il seguente problema:

$$\max\{0 + 8; 8 + 4\} = 12$$

e così via.

Una volta etichettato il nodo finale, come prima il valore ottenuto corrisponde al valore ottimo dell'obiettivo, in questo caso  $J^* = 17$ .

Lo stesso grafo, letto a ritroso, permette di ottenere la successione che costituisce il cammino critico, ricostruendo quale (o quali) sono stati gli archi attraverso i quali è stata assegnata una certa etichetta. Nel caso del problema in esame, tale successione è:  $S \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$ . Se una o più fasi del cammino critico venissero ritardate, il tempo di completamento del progetto slitterebbe.



Questo algoritmo è molto utilizzato nel project management e, per fornire una lettura più immediata della soluzione, si ricorre spesso al cosiddetto cronogramma, o diagramma di Gantt, dal nome dell'ingegnere statunitense (Henry Lawrence Gantt (1861-1919)) che lo ideò nel 1917. Si tratta di una rappresentazione nella quale l'ascissa rappresenta il tempo (i mesi), e in ordinata vengono introdotte le etichette delle fasi: per ciascuna di quelle appartenenti al cammino critico, si disegna un segmento che parte dal mese corrispondente al valore della sua etichetta e lungo quanto la sua durata, in modo da allocare esplicitamente queste fasi nel tempo. Solitamente si aggiungono poi le altre fasi indicando l'intervallo di tempo nel quale allocare le rispettive durate. Tali intervalli iniziano sempre dalla rispettiva etichetta, ma la loro lunghezza dipende dal rispetto dei vincoli di precedenza del caso in esame.